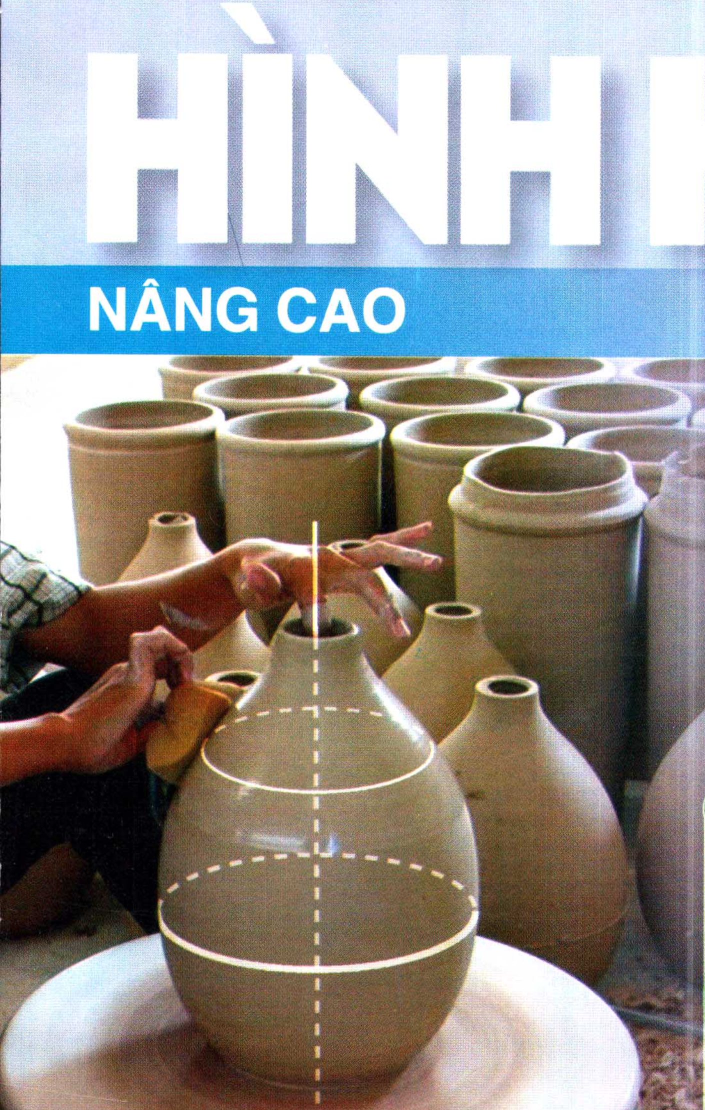
BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

HÌNH HỌC
NÂNG CAO
12



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐOÀN QUỲNH (Tổng chủ biên) - VĂN NHƯ CƯƠNG (Chủ biên)
PHẠM KHẮC BAN - LÊ HUY HÙNG - TẠ MÂN

HÌNH HỌC

NÂNG CAO

12

SÁCH IN THỬ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

NHỮNG ĐIỀU HỌC SINH CẦN CHÚ Ý KHI SỬ DỤNG SÁCH GIÁO KHOA

1. Khi nghe thầy cô giáo giảng bài, luôn luôn có SGK trước mặt. Tuy nhiên không viết, vẽ thêm vào SGK để năm sau các bạn khác có thể dùng được.

2. Về trình bày, sách giáo khoa có hai mảng : mảng chính và mảng phụ.

Mảng chính gồm các định nghĩa, định lí, tính chất,... và thường được đóng khung hoặc có đường viền ở mép trái. Mảng này được in lùi vào trong.

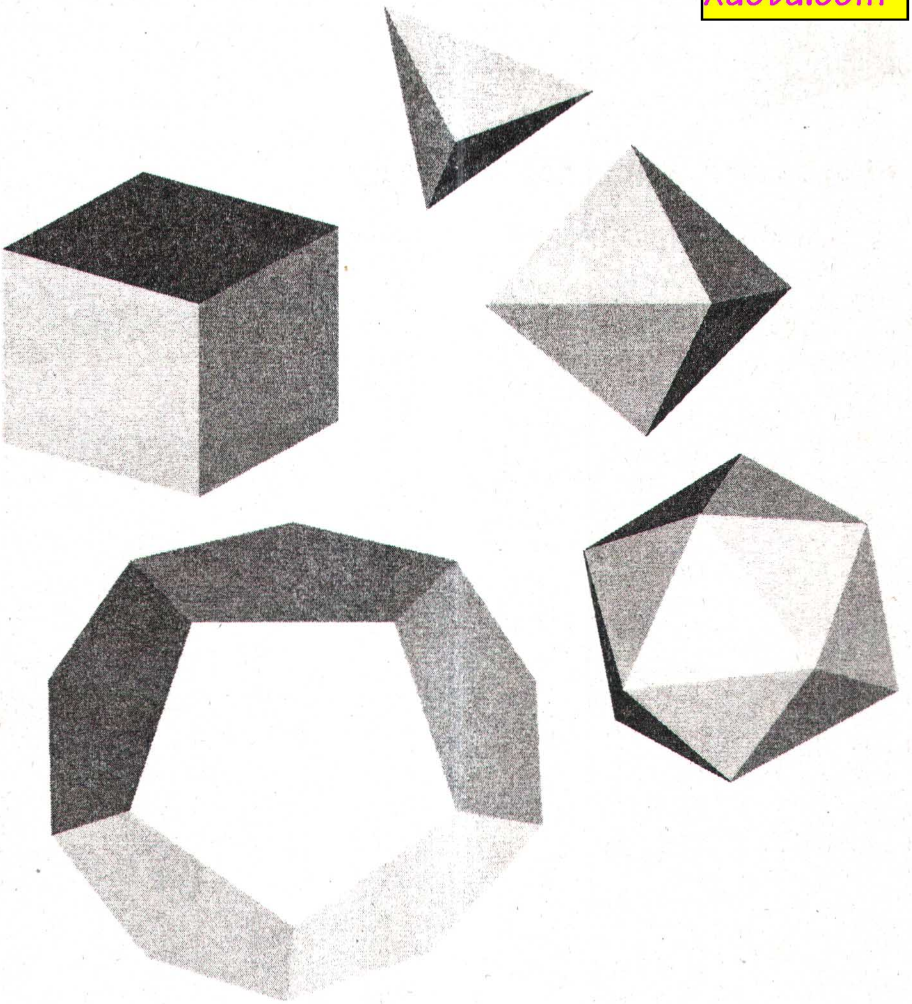
3. Khi gặp **Câu hỏi** $\boxed{?}$, cần phải suy nghĩ, trả lời nhanh và đúng.

4. Khi gặp **Hoạt động**, phải dùng bút và giấy nháp để thực hiện những yêu cầu mà hoạt động đòi hỏi.

Bản quyền thuộc Nhà xuất bản Giáo dục - Bộ Giáo dục và Đào tạo

720–2007/CXB/670–1571/GD Mã số : NH202M8

CHƯƠNG I KHỐI ĐA DIỆN VÀ THỂ TÍCH CỦA CHÚNG

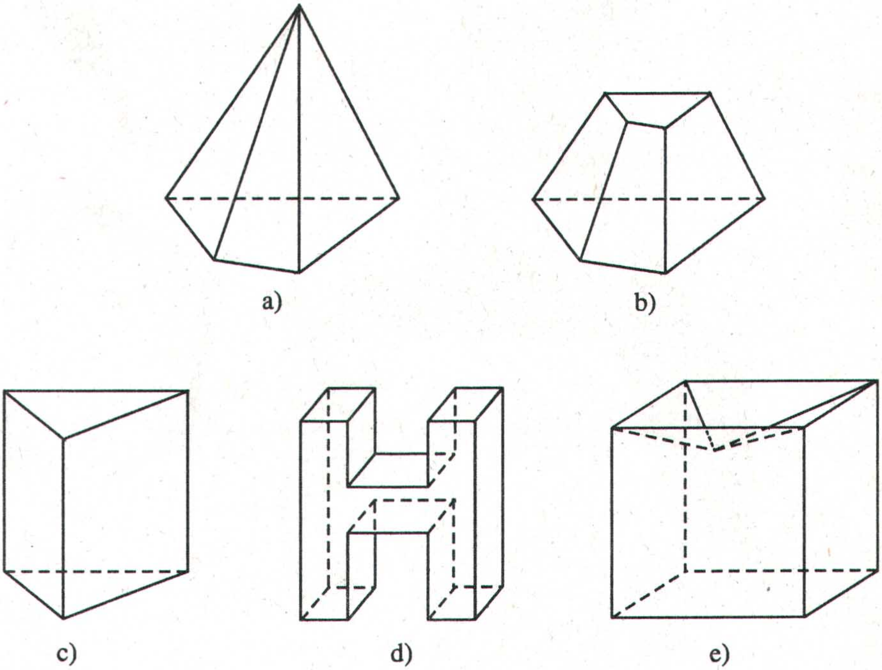


Trong đời sống hằng ngày, chúng ta thường gặp những vật thể có hình dạng là khối đa diện. Trong chương này, ta sẽ làm quen với các khối đa diện như khối lăng trụ, khối chóp, ... và các khối đa diện đều. Học sinh cần nhớ công thức tính thể tích khối chóp, khối lăng trụ, từ đó biết cách tính thể tích của các khối phức tạp hơn.

§1 KHÁI NIỆM VỀ KHỐI ĐA

1. Khối đa diện. Khối chóp, khối lăng trụ

Các em hãy quan sát các hình sau đây (hình 1a, 1b, 1c, 1d, 1e).


a) b) c) d) e)

Hình 1

Mỗi hình trên đều có hai đặc điểm :

a) Gồm một số hữu hạn đa giác phẳng (ở đây "đa giác phẳng" được hiểu là bao gồm cả các điểm trong của nó) ;

b) Phân chia không gian thành hai phần : *phần bên trong* và *phần bên ngoài* của hình đó. (Nếu ta chế tạo mỗi hình bằng chất nhựa trong suốt thì ta có thể bơm vào phần bên trong của nó một chất khí có màu, và khi đó phần bên trong đã được "tô màu", còn phần bên ngoài thì không).

Giả sử $\mathscr{H}$ là hình có hai đặc điểm nói trên. Khi đó, mỗi điểm thuộc phần bên trong của nó được gọi là *điểm nằm trong* $\mathscr{H}$.

> *Hình $\mathscr{H}$ cùng với các điểm nằm trong $\mathscr{H}$ được gọi là* ***khối đa diện*** *giới hạn bởi hình $\mathscr{H}$.*

Mỗi đa giác của hình $\mathscr{H}$ được gọi là một *mặt* của khối đa diện. Các đỉnh, các cạnh của mỗi mặt còn gọi là *đỉnh*, *cạnh* của khối đa diện. Các điểm nằm trong hình $\mathscr{H}$ còn gọi là *điểm trong* của khối đa diện.

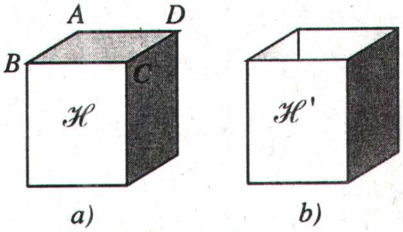
Khối đa diện được gọi là *khối chóp*, *khối chóp cụt* nếu nó được giới hạn bởi một hình chóp, hình chóp cụt (h.1a, 1b). Như vậy, ta có thể nói về khối chóp n-giác, khối chóp cụt n-giác, khối chóp đều, khối tứ diện,... .

Tương tự, khối đa diện được gọi là *khối lăng trụ* nếu nó được giới hạn bởi một hình lăng trụ (h.1c). Ta cũng có thể nói về khối hộp, khối hộp chữ nhật, khối lập phương,...

Ngoài các khối kể trên, chúng ta còn gặp các khối đa diện phức tạp hơn như ở các hình 1d, 1e.

?1 *Hình hộp chữ nhật $\mathscr{H}$ có 6 mặt là hình chữ nhật (h.2a). Nếu ta bỏ đi hình chữ nhật ABCD thì ta được một hình $\mathscr{H}'$ gồm 5 hình chữ nhật còn lại (h.2b).*

Tại sao không thể nói rằng có khối đa diện giới hạn bởi hình $\mathscr{H}'$?



a) b)

Hình 2

Từ đó ta cần chú ý rằng : *Khối đa diện được giới hạn bởi một hình gồm các đa giác phẳng, nhưng không phải bất kì hình nào gồm các đa giác phẳng cũng giới hạn ra một khối đa diện.*

Từ đây trở đi, ta chỉ xét các khối đa diện giới hạn bởi hình $\mathscr{H}$ gồm một số hữu hạn đa giác phẳng thoả mãn hai điều kiện :

1) Hai đa giác bất kì hoặc không có điểm chung, hoặc có một đỉnh chung, hoặc có một cạnh chung.

2) Mỗi cạnh của một đa giác là cạnh chung của đúng hai đa giác.

> *Hình $\mathscr{H}$ gồm các đa giác đó được gọi là một* ***hình đa diện****, hoặc đơn giản là* ***đa diện.***

1

Hãy kiểm tra rằng các hình 1a, 1b, 1c, 1d, 1e đều thoả mãn các điều kiện 1) và 2) trên đây. Hình 2b không thoả mãn điều kiện nào trong hai điều kiện đó ?

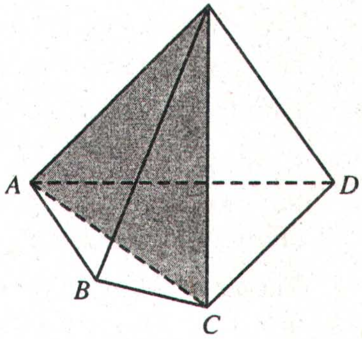
2. Phân chia và lắp ghép các khối đa diện

Ví dụ 1

Cho khối chóp tứ giác S.ABCD (h.3). Ta hãy xét hai khối chóp tam giác S.ABC và S.ACD. Dễ thấy rằng :

1) Hai khối chóp đó không có điểm trong chung, nghĩa là điểm trong của khối chóp này không phải là điểm trong của khối chóp kia.

2) Hợp của hai khối chóp S.ABC và S.ACD chính là khối chóp S.ABCD.



Hình 3

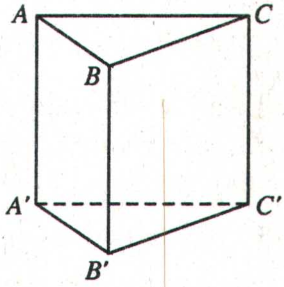
Trong trường hợp đó ta nói rằng : *Khối đa diện S.ABCD được phân chia thành hai khối đa diện S.ABC và S.ACD*. Ta cũng còn nói : *Hai khối đa diện S.ABC và S.ACD được ghép lại thành khối đa diện S.ABCD.*

?2 *Có thể phân chia khối chóp bất kì thành những khối tứ diện hay không ?*

2 (h.4)

1) Cắt khối lăng trụ *ABC.A'B'C'* bởi mặt phẳng (*A'BC*). Khi đó khối lăng trụ được phân chia thành những khối đa diện nào ?

2) Hãy phân chia khối lăng trụ *ABC.A'B'C'* thành ba khối tứ diện.

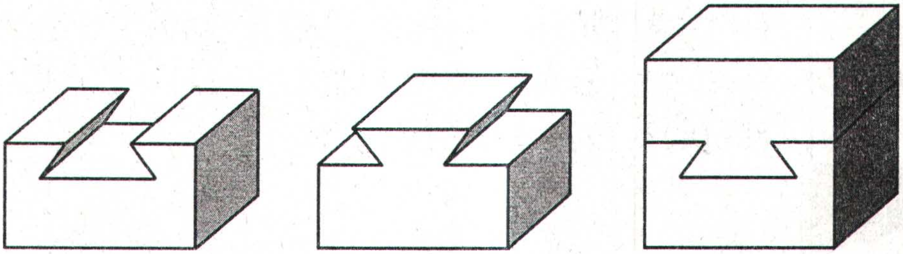


Hình 4

Một cách tổng quát, dễ thấy rằng *mọi khối chóp và khối lăng trụ luôn có thể phân chia được thành những khối tứ diện* (bằng nhiều cách khác nhau). Thực ra điều đó cũng đúng cho khối đa diện bất kì.

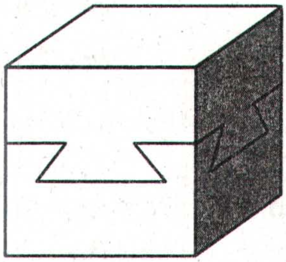
Ví dụ 2

Hình 5 cho ta thấy hai miếng gỗ (xem như hai khối đa diện) được chế tạo sao cho chúng có thể ghép vừa khít với nhau để tạo thành một khối lập phương. Để tháo rời hai miếng gỗ ở hình lập phương, cần phải cố định một miếng và tịnh tiến miếng kia theo một vectơ có phương hoàn toàn xác định.



Hình 5

Vui một chút !



Hình 6

Khối lập phương ở hình 6 được tạo thành từ hai miếng gỗ được ghép khít vào nhau, miếng trên và miếng dưới. (Ta không nhìn thấy hai mặt bên phía sau, nhưng chúng cũng hoàn toàn giống như hai mặt trông thấy).

Em hãy chỉ ra cách chế tạo khối lập phương như vậy.

Câu hỏi và bài tập

1. Chứng minh rằng nếu khối đa diện có các mặt là tam giác thì số mặt phải là số chẵn. Hãy chỉ ra những khối đa diện như thế với số mặt bằng 4, 6, 8, 10.
2. Chứng minh rằng nếu khối đa diện có mỗi đỉnh là đỉnh chung của ba cạnh thì số đỉnh phải là số chẵn.
3. Chứng minh rằng nếu khối đa diện có các mặt là tam giác và mỗi đỉnh là đỉnh chung của ba cạnh thì đó là khối tứ diện.
4. Hãy phân chia một khối hộp thành năm khối tứ diện.
5. Hãy phân chia một khối tứ diện thành bốn khối tứ diện bởi hai mặt phẳng.

§2 PHÉP ĐỐI XỨNG QUA MẶT PHẲNG VÀ SỰ BẰNG NHAU CỦA CÁC KHỐI ĐA DIỆN

Phép biến hình trong không gian được định nghĩa tương tự như trong mặt phẳng :

Phép biến hình F trong không gian là một quy tắc để với mỗi điểm M (trong không gian), xác định được một điểm M' duy nhất gọi là ảnh của điểm M qua phép biến hình F. Ta còn nói F biến điểm M thành điểm M' và kí hiệu M' = F(M).

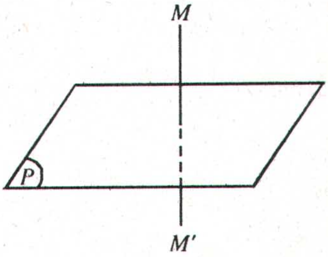
Qua phép biến hình F, mỗi hình $\mathscr{H}$ được biến thành hình $\mathscr{H}'$ gồm tất cả các ảnh của các điểm thuộc hình $\mathscr{H}$.

Sau đây ta xét phép đối xứng qua mặt phẳng, đó là một phép biến hình thường gặp.

1. Phép đối xứng qua mặt phẳng

ĐỊNH NGHĨA 1 (h.7)

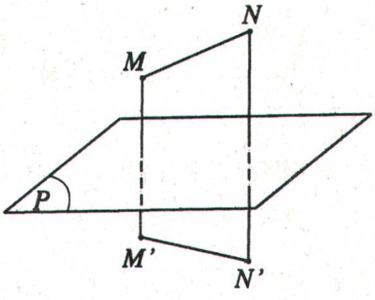
> ***Phép đối xứng qua mặt phẳng*** *(P) là phép biến hình biến mỗi điểm thuộc (P) thành chính nó và biến mỗi điểm M không thuộc (P) thành điểm M' sao cho (P) là mặt phẳng trung trực của MM'.*



Hình 7

ĐỊNH LÍ (h.8)

Nếu phép đối xứng qua mp(P) biến hai điểm M, N lần lượt thành hai điểm M', N' thì M'N' = MN. (Như vậy có thể nói : phép đối xứng qua mặt phẳng là phép biến hình bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì).



Hình 8

1 (để chứng minh định lí)

Nếu M, N nằm trên (P) thì M' trùng M và N' trùng N nên $M'N' = MN$.

Nếu có ít nhất một trong hai điểm M, N không nằm trên (P) thì có mp(Q) đi qua các điểm M, N, M', N'. Hãy dùng kiến thức hình học phẳng để chứng minh $M'N' = MN$.

Khi đứng trước một tấm gương phẳng, mỗi người sẽ nhìn thấy hình của mình ở "phía sau" tấm gương đó (h.9). Phép đối xứng qua mặt phẳng của tấm gương đã "biến" mỗi người thành hình của họ.

Hình 9. Ảnh chụp một em bé trước gương

Hình 10 là ảnh của Tháp Rùa đang soi bóng trên mặt nước Hồ Gươm (Hà Nội). Mặt hồ xem như là một phần của mặt phẳng, phép đối xứng qua mặt phẳng đó biến Tháp Rùa thành cái bóng của nó.

Hình 10. Ảnh chụp Tháp Rùa và bóng của nó

2. Mặt phẳng đối xứng của một hình

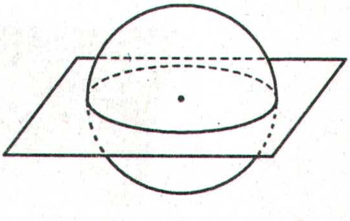
ĐỊNH NGHĨA 2

> *Nếu phép đối xứng qua mặt phẳng (P) biến hình $\mathcal{H}$ thành chính nó thì (P) gọi là* ***mặt phẳng đối xứng*** *của hình $\mathcal{H}$.*

Một số ví dụ

Ví dụ 1

Mọi mặt phẳng đi qua tâm của mặt cầu đều là mặt phẳng đối xứng của mặt cầu (h.11).

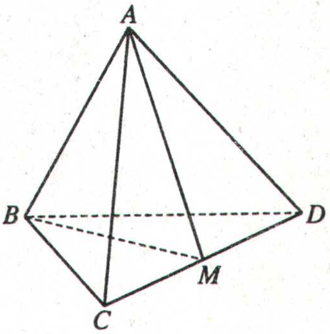


Hình 11

Ví dụ 2

Cho tứ diện đều ABCD (h.12). Gọi M là trung điểm của cạnh CD thì phép đối xứng qua mp(ABM) biến A thành A, B thành B, C thành D, D thành C. Như vậy, phép đối xứng đó biến tứ diện ABCD thành chính nó, suy ra mặt phẳng (ABM) là mặt phẳng đối xứng của tứ diện ABCD.

Hình tứ diện đều ABCD có sáu mặt phẳng đối xứng. Đó là các mặt phẳng đi qua một cạnh và trung điểm của cạnh đối diện.



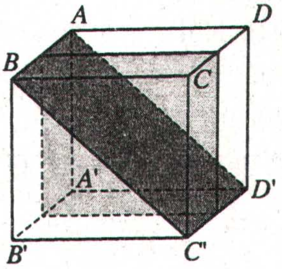
Hình 12

Ví dụ 3

Xét hình lập phương ABCD.A'B'C'D' (h.13).

Nếu (P) là mặt phẳng trung trực của cạnh AB thì nó cũng là mặt phẳng trung trực của các cạnh CD, A'B' và C'D', bởi vậy nó là mặt phẳng đối xứng của hình lập phương. Tương tự, các mặt phẳng trung trực của các cạnh AD, và AA' cũng là các mặt phẳng đối xứng của hình lập phương.

Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua hai cạnh đối diện AB và C'D' thì (Q) là mặt phẳng đối xứng của hình lập phương vì phép đối xứng qua (Q) biến mỗi điểm A, B, C', D' thành chính nó và biến A' thành D, D thành A', C thành B' và B' thành C.

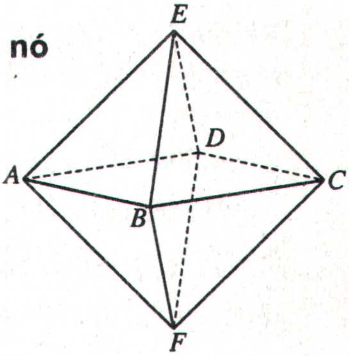


Hình 13

?1 *Như vậy hình lập phương có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng ?*

3. Hình bát diện đều và mặt phẳng đối xứng của nó

Hình 14 là một hình đa diện có 8 mặt là những tam giác đều : *EAB*, *EBC*, *ECD*, *EDA*, *FAB*, *FBC*, *FCD* và *FDA*, có 6 đỉnh *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, mỗi đỉnh là đỉnh chung cho bốn tam giác đều. Hình đó gọi là *hình bát diện đều* (hay *hình tám mặt đều*) và được kí hiệu là *ABCDEF*.



Hình 14

Tính chất

> *Bốn đỉnh A, B, C, D nằm trên một mặt phẳng và đó là một mặt phẳng đối xứng của hình bát diện đều ABCDEF.*

Chứng minh

Vì mỗi điểm *A*, *B*, *C*, *D* cách đều hai điểm *E* và *F* nên chúng nằm trên mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng *EF*. Phép đối xứng qua mặt phẳng đó biến mỗi điểm *A*, *B*, *C*, *D* thành chính nó và biến điểm *E* thành *F*, *F* thành *E* nên mp(*ABCD*) là mặt phẳng đối xứng của bát diện đều *ABCDEF*. ■

2
Tìm thêm các mặt phẳng đối xứng khác của hình bát diện đều.

4. Phép dời hình và sự bằng nhau của các hình

Phép dời hình trong không gian được định nghĩa tương tự như trong mặt phẳng.

a) Định nghĩa phép dời hình

> *Một phép biến hình F trong không gian được gọi là* ***phép dời hình*** *nếu nó bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì (có nghĩa là nếu F biến hai điểm bất kì M, N lần lượt thành hai điểm M', N' thì M'N' = MN).*

Từ định nghĩa đó, ta suy ra phép dời hình biến đường thẳng thành đường thẳng, mặt phẳng thành mặt phẳng,... .

Hiển nhiên phép đối xứng qua mặt phẳng là một phép dời hình. *Phép đồng nhất* (biến mỗi điểm thành chính nó) là một phép dời hình.

Rõ ràng nếu ta thực hiện liên tiếp các phép dời hình thì ta cũng có kết quả là phép dời hình. Nói cách khác : *Hợp thành của các phép dời hình là phép dời hình.*

b) Một số ví dụ về phép dời hình

Ngoài phép đối xứng qua mặt phẳng, ta thường gặp một số phép dời hình sau đây :

- *Phép tịnh tiến* : Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ là phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$.
- *Phép đối xứng qua đường thẳng* (còn gọi là *phép đối xứng trục*) : Cho đường thẳng d, phép đối xứng qua đường thẳng d là phép biến hình biến mỗi điểm thuộc d thành chính nó và biến mỗi điểm M không thuộc d thành điểm M' sao cho d là đường trung trực của đoạn thẳng MM'.
- *Phép đối xứng qua một điểm* (còn gọi là *phép đối xứng tâm*) : Cho điểm O, phép đối xứng qua điểm O là phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} = \vec{0}$.

c) Định nghĩa hai hình bằng nhau

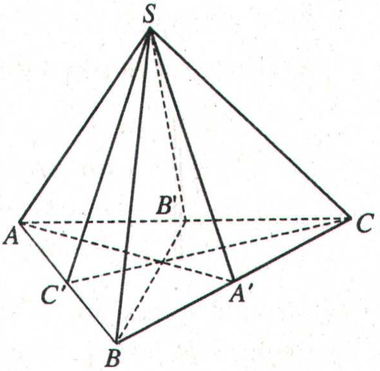
> *Hai hình $\mathcal{H}$ và $\mathcal{H}'$ gọi là* ***bằng nhau*** *nếu có một phép dời hình biến hình này thành hình kia.*

?2 *Hai mặt cầu có bán kính bằng nhau thì có bằng nhau hay không ? Vì sao ?*

Ví dụ 4. Cho *hình chóp đều $S.ABC$. Gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm của cạnh BC, CA và AB. Khi đó hai tứ diện $SABA'$ và $SBCB'$ bằng nhau.*

Giải (h.15)

Thật vậy, phép đối xứng qua mp(SAA') biến các điểm S, A, B, A' lần lượt thành các điểm S, A, C, A' và phép đối xứng qua mp(SCC') biến các điểm S, A, C, A' thành các điểm S, B, C, B'. Như vậy, qua hai phép đối xứng trên, bốn đỉnh S, A, B, A' của tứ diện $SABA'$ biến thành bốn đỉnh S, B, C, B' của tứ diện $SBCB'$ nên theo định nghĩa, hai tứ diện đó bằng nhau. ■



Hình 15

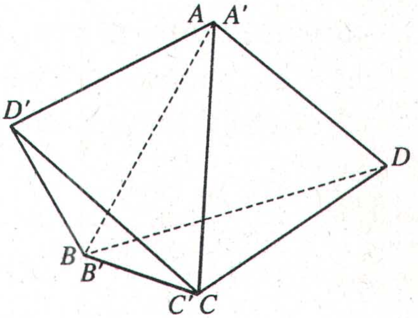
d) Định lí

> *Hai hình tứ diện $ABCD$ và $A'B'C'D'$ bằng nhau nếu chúng có các cạnh tương ứng bằng nhau, nghĩa là $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CD = C'D'$, $DA = D'A'$, $AC = A'C'$, $BD = B'D'$.*

Chứng minh. Ta xét các trường hợp sau :

Trường hợp 1 (h.16). *Hai hình tứ diện đó có ba cặp đỉnh tương ứng trùng nhau,* chẳng hạn A trùng A', B trùng B', C trùng C', còn D khác D'.

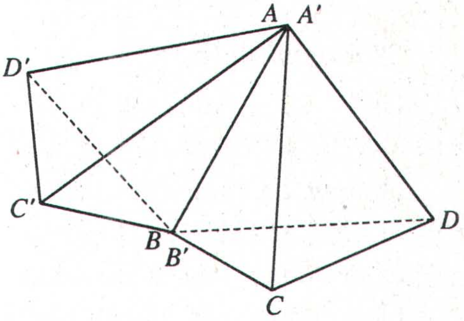
Khi đó, mỗi điểm A, B, C cách đều hai điểm D và D' nên mp(ABC) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng DD', suy ra phép đối xứng qua mp(ABC) biến các đỉnh A, B, C, D lần lượt thành các đỉnh A', B', C', D'. Vậy hai tứ diện $ABCD$ và $A'B'C'D'$ bằng nhau.



Hình 16

Trường hợp 2 (h.17). *Hai hình tứ diện đó có hai cặp đỉnh tương ứng trùng nhau*, chẳng hạn A trùng A', B trùng B'.

Khi đó gọi (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng CC' thì (P) đi qua A và B (vì A và B cùng cách đều hai điểm C và C').Vậy phép đối xứng qua mp(P) sẽ biến các điểm A, B, C, D lần lượt thành các điểm A', B', C', D_1 và do đó tứ diện $ABCD$ bằng tứ diện $A'B'C'D_1$.



Hình 17

Vì hai tứ diện $A'B'C'D_1$ và $A'B'C'D'$ có các cạnh tương ứng bằng nhau và có ba đỉnh tương ứng trùng nhau nên theo trường hợp 1, chúng bằng nhau.

Trường hợp 3. Hai hình tứ diện đó có một cặp đỉnh tương ứng trùng nhau, chẳng hạn A trùng A'.

Khi đó, gọi (Q) là mặt phẳng trung trực của BB' thì (Q) đi qua A (vì A cách đều B và B'). Vậy phép đối xứng qua (Q) biến các điểm A, B, C, D lần lượt thành các điểm A', B', C_1, D_1 và do đó, hai tứ diện $ABCD$ và $A'B'C_1D_1$

bằng nhau. Nhưng hai tứ diện $A'B'C_1D_1$ và $A'B'C'D'$ có các cạnh tương ứng bằng nhau và có hai cặp đỉnh tương ứng trùng nhau nên theo trường hợp 2, chúng bằng nhau.

Trường hợp 4. Hai hình tứ diện đó không có cặp đỉnh tương ứng nào trùng nhau.

Khi đó, gọi (R) là mặt phẳng trung trực của AA', phép đối xứng qua (R) biến các điểm A, B, C, D lần lượt thành các điểm A', B_1, C_1, D_1 nên tứ diện $ABCD$ bằng tứ diện $A'B_1C_1D_1$; mà hai tứ diện $A'B_1C_1D_1$ và $A'B'C'D'$ có các cạnh tương ứng bằng nhau và một cặp đỉnh tương ứng trùng nhau, do đó chúng bằng nhau theo trường hợp 3. ■

HỆ QUẢ 1

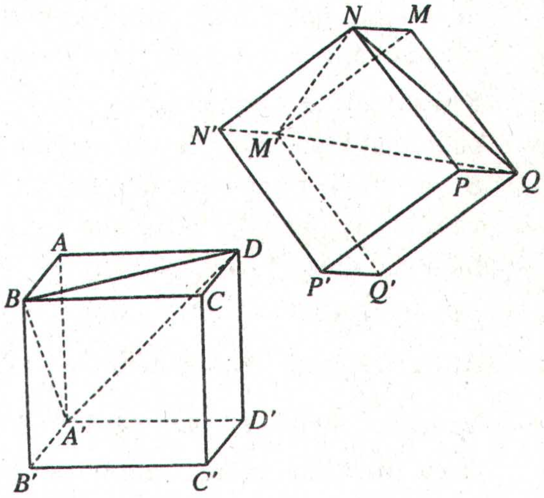
Hai tứ diện đều có cạnh bằng nhau thì bằng nhau.

HỆ QUẢ 2

Hai hình lập phương có cạnh bằng nhau thì bằng nhau.

Chứng minh (h.18)

Giả sử $ABCD.A'B'C'D'$ và $MNPQ.M'N'P'Q'$ là hai hình lập phương có cạnh đều bằng a. Hai tứ diện $ABDA'$ và $MNQM'$ có các cạnh tương ứng bằng nhau nên bằng nhau, tức là có phép dời hình F biến các điểm A, B, D, A' lần lượt thành M, N, Q, M'. Vì F là phép dời hình nên F biến hình vuông thành hình vuông, do đó F biến điểm C thành điểm P, biến điểm B' thành N', biến điểm D' thành Q' và biến điểm C' thành điểm P'. Như vậy, hai hình lập phương đã cho bằng nhau. ■



Hình 18

Câu hỏi và bài tập

6. Gọi *Đ* là phép đối xứng qua mặt phẳng (P) và a là một đường thẳng nào đó. Giả sử *Đ* biến đường thẳng a thành đường thẳng a'. Trong trường hợp nào thì :

a) a trùng với a' ;

b) a song song với a' ;

c) a cắt a' ;

d) a và a' chéo nhau ?

7. Tìm các mặt phẳng đối xứng của các hình sau đây :

a) Hình chóp tứ giác đều.

b) Hình chóp cụt tam giác đều.

c) Hình hộp chữ nhật mà không có mặt nào là hình vuông.

8. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng :

a) Các hình chóp $A.A'B'C'D'$ và $C'.ABCD$ bằng nhau.

b) Các hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và $AA'D'.BB'C'$ bằng nhau.

9. Chứng minh rằng các phép tịnh tiến, đối xứng trục, đối xứng tâm là những phép dời hình.

10. Chứng minh rằng :

a) Hợp thành của hai phép đối xứng qua hai mặt phẳng song song (P) và (Q) là một phép tịnh tiến.

b) Hợp thành của hai phép đối xứng qua hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau là một phép đối xứng qua đường thẳng.

§3

PHÉP VỊ TỰ VÀ SỰ ĐỒNG DẠNG CỦA CÁC KHỐI ĐA DIỆN. CÁC KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU

1. Phép vị tự trong không gian

ĐỊNH NGHĨA 1

> *Cho số k không đổi khác 0 và một điểm O cố định. Phép biến hình trong không gian biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho* $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ *gọi là* ***phép vị tự****. Điểm O gọi là* ***tâm vị tự****, số k gọi là* ***tỉ số vị tự****.*

Như vậy, phép vị tự trong không gian được định nghĩa hoàn toàn tương tự như trong mặt phẳng. Các tính chất sau đây của phép vị tự đều có thể chứng minh tương tự như trong mặt phẳng.

Các tính chất cơ bản của phép vị tự

1. Nếu phép vị tự tỉ số k biến hai điểm M, N thành hai điểm M', N' thì $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$*, và do đó* $M'N' = |k|MN$.

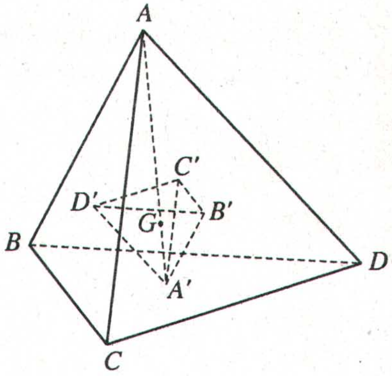
2. Phép vị tự biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng, bốn điểm đồng phẳng thành bốn điểm đồng phẳng.

Từ đó suy ra phép vị tự biến đường thẳng thành đường thẳng, mặt phẳng thành mặt phẳng.

Ví dụ 1

Cho hình tứ diện ABCD. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trọng tâm của các tam giác BCD, ACD, ABD, ABC. Chứng minh rằng có phép vị tự biến các đỉnh của tứ diện ABCD thành các đỉnh của tứ diện A'B'C'D'.

Giải (h.19)



Hình 19

Gọi G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$. Khi đó ta biết rằng :

$$\overrightarrow{GA'} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{GA},\ \overrightarrow{GB'} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{GB},$$

$$\overrightarrow{GC'} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{GC},\ \overrightarrow{GD'} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{GD}.$$

Bởi vậy, phép vị tự V tâm G, tỉ số $k = -\frac{1}{3}$ biến các điểm A, B, C, D lần lượt thành các điểm A', B', C', D'. ■

Từ các tính chất của phép vị tự, ta suy ra V cũng biến tứ diện $ABCD$ thành tứ diện $A'B'C'D'$.

?1 *Trong trường hợp nào thì phép vị tự là một phép dời hình ?*

2. Hai hình đồng dạng

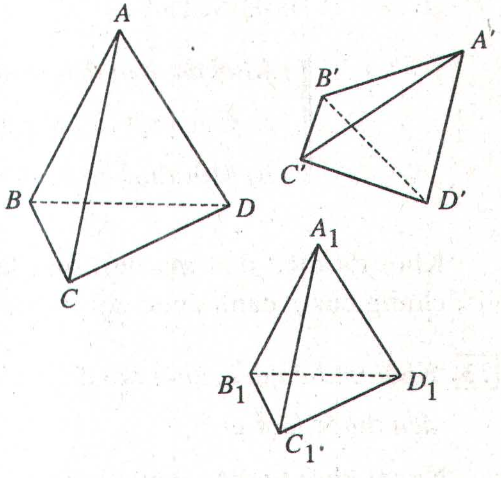
ĐỊNH NGHĨA 2

> *Hình $\mathcal{H}$ được gọi là **đồng dạng** với hình $\mathcal{H}'$ nếu có một phép vị tự biến hình $\mathcal{H}$ thành hình $\mathcal{H}_1$ mà hình $\mathcal{H}_1$ bằng hình $\mathcal{H}'$.*

Ví dụ 2. *Chứng minh rằng hai hình tứ diện đều bất kì luôn luôn đồng dạng với nhau.*

Chứng minh (h.20)

Giả sử $ABCD$ là tứ diện đều có cạnh bằng a và $A'B'C'D'$ là tứ diện đều có cạnh bằng a'. Ta xét phép vị tự V có tâm O tùy ý và có tỉ số $k = \frac{a'}{a}$. Khi đó dễ thấy tứ diện đều $ABCD$ biến thành tứ diện đều $A_1B_1C_1D_1$ có cạnh bằng a'. Vậy tứ diện $A_1B_1C_1D_1$ bằng tứ diện $A'B'C'D'$. Theo định nghĩa, tứ diện $ABCD$ đồng dạng với tứ diện $A'B'C'D'$. ■



Hình 20

Ví dụ 3. *Chứng minh rằng hai hình lập phương bất kì đều đồng dạng.*

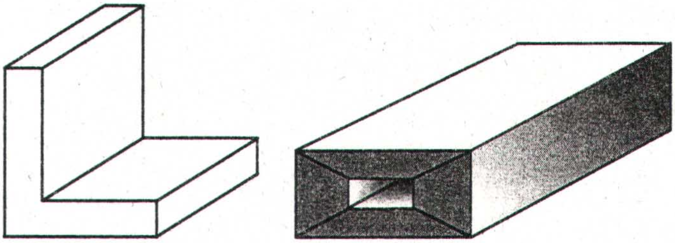
Chứng minh tương tự như ở Ví dụ 2.

3. Khối đa diện đều và sự đồng dạng của các khối đa diện đều

Trước hết ta nói về *khối đa diện lồi*, một khái niệm tương tự như khái niệm đa giác lồi trong hình học phẳng.

Một khối đa diện được gọi là *khối đa diện lồi* nếu với bất kì hai điểm A và B nào của nó thì mọi điểm của đoạn thẳng AB cũng thuộc khối đó.

Các khối đa diện trên hình 21 không phải là những khối đa diện lồi.



Hình 21

?2 *Tại sao các khối đa diện trên hình 21 không phải là những khối đa diện lồi ?*

Chúng ta đã biết thế nào là đa giác đều. Bây giờ ta sẽ định nghĩa thế nào là khối đa diện đều.

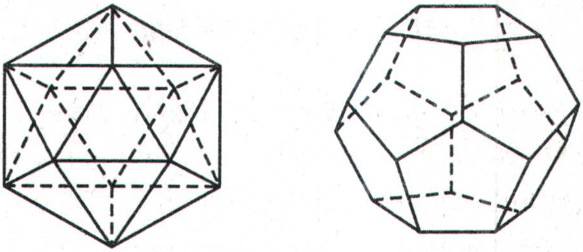
ĐỊNH NGHĨA 3

> ***Khối đa diện đều*** *là một khối đa diện lồi có hai tính chất sau đây :*
>
> *a) Các mặt là những đa giác đều và có cùng số cạnh ;*
>
> *b) Mỗi đỉnh là đỉnh chung của cùng một số cạnh.*

Khối đa diện đều mà mỗi mặt là đa giác đều n cạnh và mỗi đỉnh là đỉnh chung của p cạnh được gọi là *khối đa diện đều loại* $\{n, p\}$.

?3 *Khối tứ diện đều, khối bát diện đều và khối lập phương là những khối đa diện đều thuộc loại gì ?*

Ngoài khối tứ diện đều, khối lập phương và khối bát diện đều, hình 22 dưới đây cho ta thấy thêm hai loại nữa của khối đa diện đều.



Khối hai mươi mặt đều (thuộc loại {3, 5})	*Khối mười hai mặt đều (thuộc loại {5, 3})*

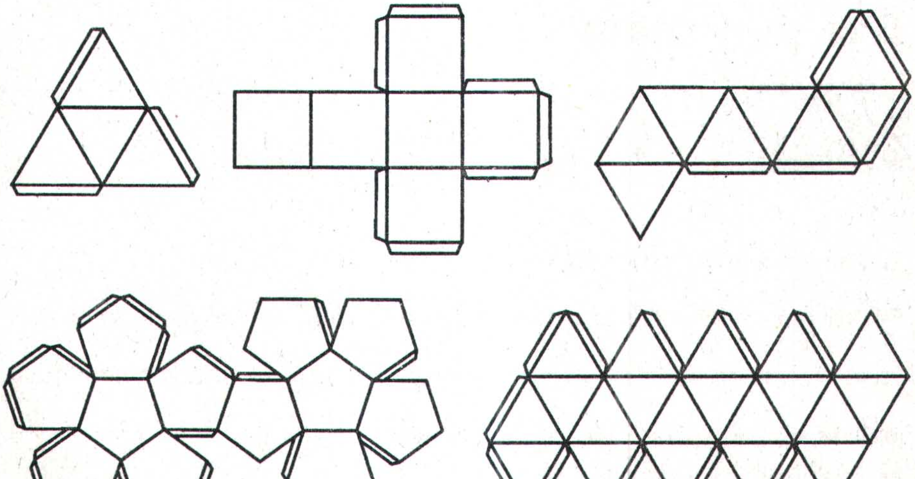
Hình 22

Người ta chứng minh được rằng chỉ có năm loại khối đa diện đều (xem bài đọc thêm *Định lí Ơ-le và khối đa diện đều*) và hai khối đa diện đều cùng loại thì đồng dạng với nhau.

Em hãy làm thử !

Chúng ta có thể làm mô hình của năm loại khối đa diện đều bằng nguyên vật liệu là bìa cứng và hồ dán.

Hãy cắt bìa cứng theo mẫu dưới đây (h.23) và dán lại thành các khối đa diện đều.



Hình 23

Câu hỏi và bài tập

11. Chứng minh rằng phép vị tự biến mỗi đường thẳng a thành một đường thẳng a' song song hoặc trùng với a, biến mỗi mặt phẳng (α) thành một mặt phẳng (α') song song hoặc trùng với (α).

12. Cho một khối tứ diện đều, hãy chứng minh rằng :
a) Các trọng tâm của các mặt của nó là các đỉnh của một khối tứ diện đều.
b) Các trung điểm của các cạnh của nó là các đỉnh của một khối tám mặt đều.

13. Hai đỉnh của một khối tám mặt đều được gọi là hai đỉnh *đối diện* nếu chúng không cùng thuộc một cạnh của khối đó. Đoạn thẳng nối hai đỉnh đối diện gọi là *đường chéo* của khối tám mặt đều. Chứng minh rằng trong khối tám mặt đều :

a) Ba đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

b) Ba đường chéo đôi một vuông góc với nhau.

c) Ba đường chéo bằng nhau.

14. Chứng minh rằng :

a) Tâm các mặt của một khối lập phương là các đỉnh của một khối tám mặt đều.

b) Tâm các mặt của một khối tám mặt đều là các đỉnh của một khối lập phương.

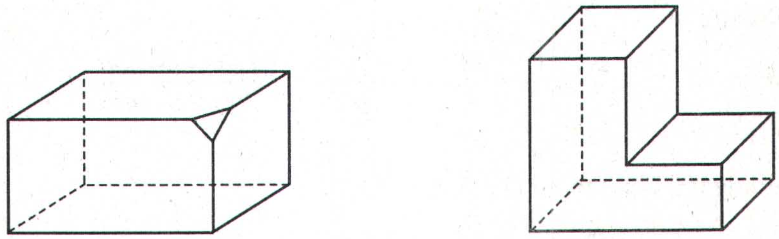
Bài đọc thêm

ĐỊNH LÍ Ơ-LE VÀ KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU

1. Đặc số Ơ-le của khối đa diện

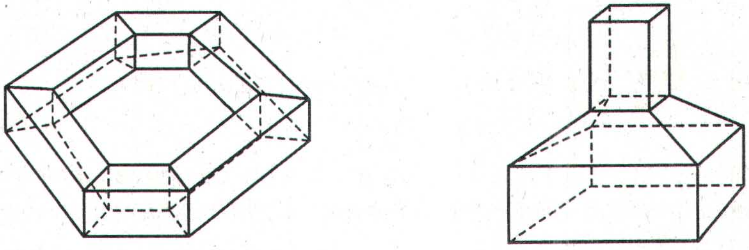
Đối với mỗi khối đa diện $\mathscr{H}$, ta kí hiệu *Đ* là số đỉnh, *C* là số cạnh, *M* là số mặt của $\mathscr{H}$ và khi đó, số $\chi(\mathscr{H}) = Đ - C + M$ được gọi là *đặc số Ơ-le* (còn gọi tắt là *đặc số*) của khối đa diện $\mathscr{H}$. (Chữ Hy Lạp χ đọc là "khi").

Các hình vẽ sau đây cho ta một số khối đa diện cùng với các đặc số của nó :



$Đ = 10, C = 15, M = 7 ; \chi = 2$

$Đ = 12, C = 18, M = 8 ; \chi = 2$



$Đ = 24, C = 48, M = 24 ; \chi = 0$

$Đ = 16, C = 28, M = 14 ; \chi = 2$

Hình 24

Như vậy, các khối đa diện có thể có các đặc số khác nhau. Tuy nhiên, nhà toán học Thụy Sĩ Ơ-le (Euler L.) đã chứng minh định lí mang tên ông sau đây :

Định lí Ơ-le. *Mọi khối đa diện lồi đều có đặc số bằng 2.*

Ta có thể kiểm nghiệm định lí đó cho các khối đa diện đều (đó là những khối đa diện lồi). Chú ý rằng trên hình 24 có những khối đa diện không lồi nhưng vẫn có đặc số bằng 2.

2. Chứng minh định lí về năm loại khối đa diện đều

Dùng định lí Ơ-le, ta có thể chứng minh rằng chỉ có năm loại khối đa diện đều.

Nhắc lại : Khối đa diện đều loại $\{n ; p\}$ là khối đa diện lồi có mặt là các n-giác đều và mỗi đỉnh là đỉnh chung của p cạnh.

Định lí. *Chỉ có năm loại khối đa diện đều, đó là các loại :* $\{3 ; 3\}$. $\{4 ; 3\}$, $\{3 ; 4\}$, $\{5 ; 3\}$, $\{3 ; 5\}$.

Chứng minh. Giả sử khối đa diện đều loại $\{n ; p\}$ có $Đ$ đỉnh, C cạnh và M mặt.

Vì mỗi mặt có n cạnh nên M mặt sẽ có nM cạnh, nhưng mỗi cạnh lại chung cho hai mặt nên $2C = nM$. Vì mỗi đỉnh là đỉnh chung cho p cạnh nên $Đ$ đỉnh sẽ có $pĐ$ cạnh, nhưng mỗi cạnh lại đi qua hai đỉnh nên $2C = pĐ$. Vậy ta có

$$pĐ = 2C = nM.$$

Từ đó suy ra

$$\frac{Đ}{\frac{1}{p}}=\frac{C}{\frac{1}{2}}=\frac{M}{\frac{1}{n}}=\frac{Đ-C+M}{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}=\frac{(Đ-C+M)2pn}{2n+2p-np}.$$

Theo định lí Ơ-le, ta có $Đ - C + M = 2$ nên

$$\frac{Đ}{\frac{1}{p}}=\frac{C}{\frac{1}{2}}=\frac{M}{\frac{1}{n}}=\frac{4pn}{2n+2p-np}.$$

Vậy : $$Đ=\frac{4n}{2n+2p-np}\ ;\ C=\frac{2np}{2n+2p-np}\ ;\ M=\frac{4p}{2n+2p-np}.\ (*)$$

Vì các số $Đ$, C, M, n, p đều là những số nguyên dương nên

$$2n + 2p - np > 0 \text{ hay } (n-2)(p-2) < 4.$$

Chú ý rằng $n \geq 3$; $p \geq 3$ nên $n - 2$ và $p - 2$ là hai số nguyên dương ; ngoài ra tích số của chúng bé hơn 4. Vậy chỉ có thể xảy ra các trường hợp sau :

1) $n - 2 = 1$, $p - 2 = 1$ hay $n = p = 3$, ta có khối đa diện đều loại {3 ; 3}. Khi đó, từ (*) ta suy ra $Đ = 4$, $C = 6$, $M = 4$. Đó chính là khối tứ diện đều.

2) $n - 2 = 2$, $p - 2 = 1$ hay $n = 4$, $p = 3$, ta có khối đa diện đều loại {4 ; 3}. Khi đó $Đ = 8$, $C = 12$, $M = 6$. Đó chính là khối lập phương.

3) $n - 2 = 1$, $p - 2 = 2$ hay $n = 3$, $p = 4$, ta có khối đa diện đều loại {3 ; 4}. Khi đó $Đ = 6$, $C = 12$, $M = 8$. Đó chính là khối tám mặt đều (còn gọi là khối bát diện đều).

4) $n - 2 = 3$, $p - 2 = 1$ hay $n = 5$, $p = 3$, ta có khối đa diện đều loại {5 ; 3}. Khi đó $Đ = 20$, $C = 30$, $M = 12$. Đó chính là khối mười hai mặt đều (còn gọi là khối thập nhị diện đều).

5) $n - 2 = 1$, $p - 2 = 3$ hay $n = 3$, $p = 5$, ta có khối đa diện đều loại {3 ; 5}. Khi đó $Đ = 12$, $C = 30$, $M = 20$. Đó chính là khối hai mươi mặt đều (còn gọi là khối nhị thập diện đều).

Vậy ta có bảng sau đây :

Loại	Tên gọi	Số đỉnh	Số cạnh	Số mặt
{3 ; 3}	Khối tứ diện đều	4	6	4
{4 ; 3}	Khối lập phương	8	12	6
{3 ; 4}	Khối tám mặt đều	6	12	8
{5 ; 3}	Khối mười hai mặt đều	20	30	12
{3 ; 5}	Khối hai mươi mặt đều	12	30	20

Năm loại khối đa diện đều kể trên được nhà triết học và toán học Pla-tông (427 - 347 trước Công nguyên) tìm ra, chúng thường được gọi là *các thể Pla-tông*. Các khối đa diện theo thứ tự trong bảng trên được Pla-tông coi là tượng trưng cho *lửa*, *đất*, *khí*, *vũ trụ* và *nước*.

§4 THỂ TÍCH CỦA KHỐI ĐA DIỆN

1. Thế nào là thể tích của một khối đa diện ?

Chúng ta biết rằng trong mặt phẳng, mỗi đa giác có một diện tích. Đó là số đo phần mặt phẳng mà đa giác đó chiếm chỗ. Tương tự như vậy, các khối đa diện chiếm những phần không gian lớn nhỏ khác nhau. Thể tích của mỗi khối đa diện là số đo của phần không gian mà nó chiếm chỗ.

Chúng ta đã biết các công thức tính thể tích của một số khối đa diện đơn giản. Sau đây chúng ta sẽ nói rõ hơn về các công thức này.

Để có những công thức như thế, chúng ta phải thừa nhận các tính chất hiển nhiên sau đây về thể tích :

1) *Hai khối đa diện bằng nhau thì có thể tích bằng nhau.*

2) *Nếu một khối đa diện được phân chia thành nhiều khối đa diện nhỏ thì thể tích của nó bằng tổng thể tích của các khối đa diện nhỏ đó.*

3) *Khối lập phương có cạnh bằng* 1 *thì có thể tích bằng* 1.

☞ CHÚ Ý

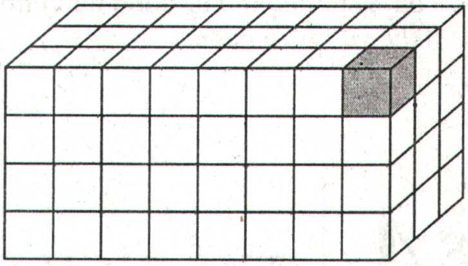
1) Trong thực tế, khi phải đo lường và tính toán về độ dài, diện tích và thể tích, người ta thường dùng những đơn vị đo khác nhau. Nếu ta dùng đơn vị đo độ dài là 1cm chẳng hạn thì theo tính chất 3, khối lập phương có cạnh bằng 1 (hiểu là 1cm) sẽ có thể tích bằng 1, nhưng hiểu là 1cm^3. Tương tự, khối lập phương có cạnh 1dm sẽ có thể tích là 1dm^3, khối lập phương có cạnh 1km thì có thể tích là 1km^3,...

2) Đôi khi để đơn giản, thể tích của khối đa diện giới hạn bởi hình đa diện $\mathscr{H}$ cũng được gọi là *thể tích của hình đa diện* $\mathscr{H}$.

2. Thể tích của khối hộp chữ nhật

Giả sử ta có một khối hộp chữ nhật với ba kích thước a, b, c đều là những số nguyên dương. Khi đó, bằng các mặt phẳng song song với các mặt của khối hộp, ta có thể phân chia nó thành các khối lập phương có cạnh bằng 1 (h.25).

Hiển nhiên số các khối lập phương đó bằng tích số $a.b.c$.



Hình 25

Theo tính chất 2, thể tích V của khối hộp chữ nhật bằng tổng các thể tích của các khối lập phương và theo tính chất 3), mỗi khối lập phương đó có thể tích bằng 1. Từ đó ta suy ra công thức

$$\boxed{V = abc.}$$

Trong trường hợp các kích thước a, b, c của khối hộp chữ nhật là những số dương tuỳ ý (không nhất thiết phải là số nguyên), người ta chứng minh được rằng công thức nói trên vẫn đúng. Như vậy một cách tổng quát, ta có :

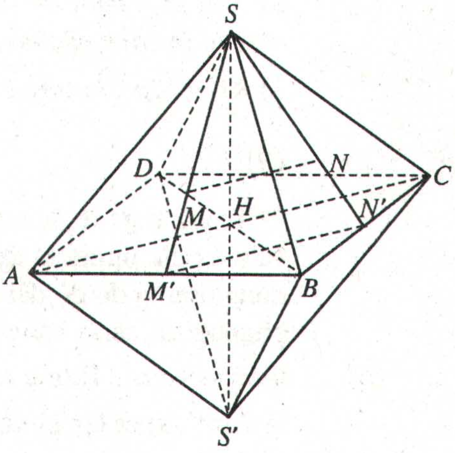
ĐỊNH LÍ 1

Thể tích của một khối hộp chữ nhật bằng tích số của ba kích thước.

Ví dụ 1. *Tính thể tích của khối lập phương có các đỉnh là trọng tâm các mặt của một khối tám mặt đều cạnh a.*

Giải. Giả sử có khối tám mặt đều với các đỉnh là S, S', A, B, C, D (h.26). Gọi M và N lần lượt là trọng tâm của tam giác SAB và SBC thì đoạn thẳng MN là một cạnh của khối lập phương. Gọi M', N' lần lượt là trung điểm của AB và BC thì M và N lần lượt nằm trên SM' và SN' nên

$$MN = \frac{2}{3}M'N' = \frac{2}{3}\frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{3}.$$



Hình 26

Vậy thể tích của khối lập phương là

$$V = MN^3 = \frac{2a^3\sqrt{2}}{27}. \qquad \blacksquare$$

1

Cho khối lăng trụ đứng có chiều cao bằng h, đáy là tam giác vuông với hai cạnh góc vuông a và b. Tính thể tích của khối lăng trụ đó.

3. Thể tích của khối chóp

Dùng phương pháp giới hạn, người ta có thể chứng minh được định lí sau đây.

ĐỊNH LÍ 2

Thể tích của một khối chóp bằng một phần ba tích số của diện tích mặt đáy và chiều cao của khối chóp đó.

Như vậy, nếu ta kí hiệu diện tích mặt đáy của khối chóp là $S_{\text{đáy}}$ và chiều cao của khối chóp là h (h là khoảng cách từ đỉnh của khối chóp tới mặt phẳng chứa đáy của khối chóp) thì thể tích V của khối chóp đó được tính theo công thức

$$\boxed{V = \frac{1}{3}S_{\text{đáy}}.h.}$$

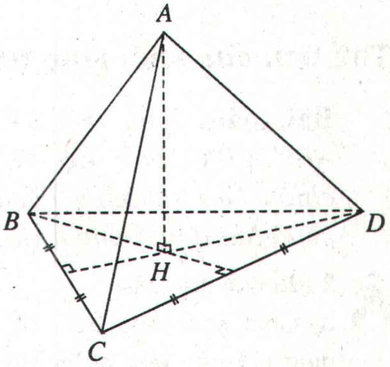
Ví dụ 2. *Tính thể tích của khối tứ diện đều có cạnh bằng a.*

Giải

Xem tứ diện đều $ABCD$ (cạnh bằng a) như là hình chóp có đỉnh là A và đáy là tam giác đều BCD có cạnh bằng a (h.27). Diện tích mặt đáy là

$$S_{BCD} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2.$$

Gọi AH là đường cao của hình chóp $A.BCD$ thì H là tâm của tam giác đều BCD. Bởi vậy chiều cao của hình chóp là



Hình 27

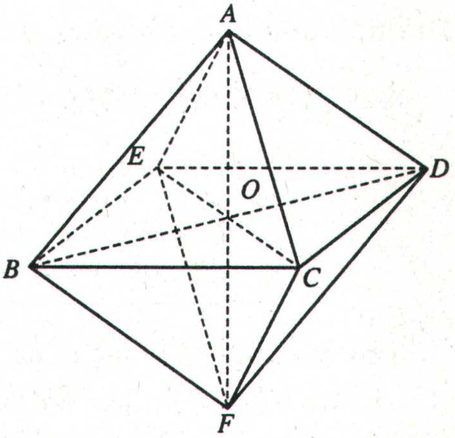
$$h = AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = a\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Từ đó suy ra khối tứ diện $ABCD$ có thể tích là

$$V = \frac{1}{3}S_{BCD}.h = \frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}}{4}a^2.a\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$ ■

Ví dụ 3. *Tính thể tích của khối tám mặt đều có cạnh bằng a.*

Giải



Hình 28

Trên hình 28, ta có khối tám mặt đều $\mathcal{H}$ với các đỉnh là A, B, C, D, E, F. Ta có thể phân chia khối đa diện $\mathcal{H}$ thành hai khối chóp tứ giác đều $A.BCDE$ và $F.BCDE$. Vì hai khối chóp đó bằng nhau nên có thể tích bằng nhau, do đó thể tích V của khối $\mathcal{H}$ bằng hai lần thể tích V_1 của khối chóp $A.BCDE$.

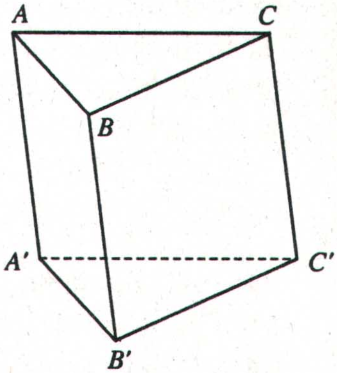
Chú ý rằng $BCDE$ là hình vuông cạnh a với tâm O và tam giác ABD là tam giác vuông cân đỉnh A, ta tính được :

$$V_1 = \frac{1}{3}S_{BCDE}.AO = \frac{1}{3}a^2.a\frac{\sqrt{2}}{2} = a^3\frac{\sqrt{2}}{6}.$$

Từ đó suy ra khối tám mặt đều nói trên có thể tích là

$$V = 2V_1 = a^3\frac{\sqrt{2}}{3}.$$ ■

4. Thể tích của khối lăng trụ



Hình 29

Bài toán. *Tính thể tích V của khối lăng trụ ABC.A'B'C' biết diện tích đáy ABC bằng S và chiều cao (khoảng cách giữa hai mặt phẳng chứa hai đáy) bằng h (h.29).*

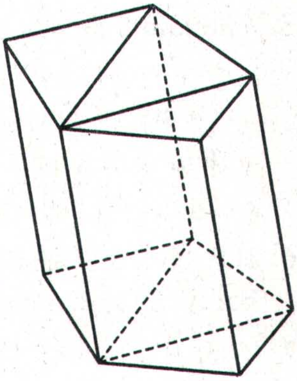
2 (để giải bài toán)

a) Chia khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành ba khối tứ diện bởi các mặt phẳng $(A'BC')$ và $(A'BC)$, hãy kể tên ba khối tứ diện đó.

b) Chứng tỏ rằng ba khối tứ diện đó có thể tích bằng nhau.

c) Từ đó suy ra công thức $V = S.h$. Hãy phát biểu thành lời công thức đó.

Bây giờ, xét khối lăng trụ có đáy là một đa giác bất kì. Vì bất kì đa giác nào cũng có thể phân chia được thành các tam giác không có điểm trong chung nên có thể phân chia khối lăng trụ đó thành các khối lăng trụ tam giác có cùng chiều cao (h.30). Tổng các thể tích của chúng chính là thể tích của khối lăng trụ ban đầu. Từ đó suy ra định lí sau đây.



Hình 30

ĐỊNH LÍ 3

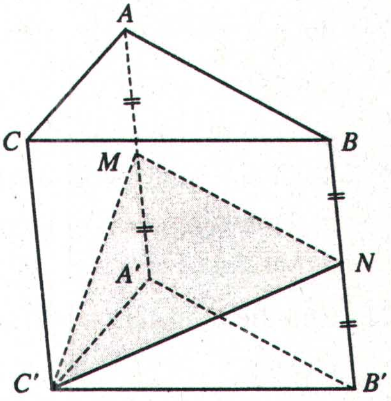
> *Thể tích của khối lăng trụ bằng tích số của diện tích mặt đáy và chiều cao của khối lăng trụ đó.*

Ví dụ 4. *Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AA' và BB'. Mặt phẳng (MNC') chia khối lăng trụ đã cho thành hai phần. Tính tỉ số thể tích của hai phần đó.*

Giải

Nếu gọi V là thể tích của khối lăng trụ thì thể tích của khối tứ diện $C'ABC$ là $\frac{V}{3}$, do đó thể tích của khối chóp $C'.ABB'A'$ là $\frac{2V}{3}$ (h.31). Vì hai khối chóp $C'.ABNM$ và $C'.MNB'A'$ có cùng chiều cao và có mặt đáy bằng nhau nên thể tích của khối chóp $C'.MNB'A'$ là

$$V_1 = \frac{1}{2}.\frac{2V}{3} = \frac{V}{3},$$



Hình 31

và thể tích khối đa diện $ABCMNC'$ là

$$V_2 = V - \frac{V}{3} = \frac{2V}{3}.$$

Ta có tỉ số thể tích hai phần được phân chia là $k = \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2}$. ■

Câu hỏi và bài tập

15. Cho tam giác ABC cố định và một điểm S thay đổi. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ có thay đổi hay không nếu :

a) Đỉnh S di chuyển trên một mặt phẳng song song với mặt phẳng (ABC) ?

b) Đỉnh S di chuyển trên một mặt phẳng song song với chỉ một cạnh đáy ?

c) Đỉnh S di chuyển trên một đường thẳng song song với một cạnh đáy ?

16. Hãy chia một khối tứ diện thành hai khối tứ diện sao cho tỉ số thể tích của hai khối tứ diện này bằng một số $k > 0$ cho trước.

17. Tính thể tích của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ biết rằng $AA'B'D'$ là khối tứ diện đều cạnh a.

18. Tính thể tích của khối lăng trụ n-giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a.

19. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông tại A, $AC = b$, $\widehat{ACB} = 60^{\circ}$. Đường thẳng BC' tạo với mp$(AA'CC')$ một góc 30°.

a) Tính độ dài đoạn thẳng AC'.

b) Tính thể tích khối lăng trụ đã cho.

20. Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, điểm A' cách đều ba điểm A, B, C, cạnh bên AA' tạo với mặt phẳng đáy một góc 60°.

a) Tính thể tích của khối lăng trụ đó.

b) Chứng minh rằng mặt bên $BCC'B'$ là một hình chữ nhật.

c) Tính tổng diện tích các mặt bên của hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ (tổng đó gọi là *diện tích xung quanh* của hình (hoặc khối) lăng trụ đã cho).

21. Cho điểm M nằm trong hình tứ diện đều $ABCD$. Chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ M tới bốn mặt của hình tứ diện là một số không phụ thuộc vào vị trí của điểm M. Tổng đó bằng bao nhiêu nếu cạnh của tứ diện đều bằng a ?

22. Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$. Gọi M là trung điểm của AA'. Mặt phẳng đi qua M, B', C chia khối lăng trụ thành hai phần. Tính tỉ số thể tích của hai phần đó.

23. Cho khối chóp tam giác $S.ABC$. Trên ba đường thẳng SA, SB, SC lần lượt lấy ba điểm A', B', C' khác với S. Gọi V và V' lần lượt là thể tích của các khối chóp $S.ABC$ và $S.A'B'C'$. Chứng minh rằng :

$$\frac{V}{V'} = \frac{SA}{SA'}.\frac{SB}{SB'}.\frac{SC}{SC'}.$$

24. Khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, M là trung điểm của cạnh SC. Mặt phẳng (P) đi qua AM, song song với BD, chia khối chóp thành hai phần. Tính tỉ số thể tích của hai phần đó.

25. Chứng minh rằng nếu có phép vị tự tỉ số k biến tứ diện $ABCD$ thành tứ diện $A'B'C'D'$ thì $\dfrac{V_{A'B'C'D'}}{V_{ABCD}} = |k|^3$.

ÔN TẬP CHƯƠNG I

I - Kiến thức cần nhớ

1. Hình đa diện gồm một số hữu hạn đa giác phẳng thoả mãn hai điều kiện :

a) Hai đa giác bất kì hoặc không có điểm chung, hoặc có một đỉnh chung, hoặc có một cạnh chung.

b) Mỗi cạnh của một đa giác là cạnh chung của đúng hai đa giác.

Hình đa diện chia không gian làm hai phần (phần bên trong và phần bên ngoài). Hình đa diện cùng với phần bên trong của nó gọi là khối đa diện.

2. Mỗi khối đa diện có thể phân chia được thành những khối tứ diện.

3. • Phép dời hình trong không gian là phép biến hình bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

• Phép đối xứng qua mặt phẳng (P) là phép biến hình biến mỗi điểm thuộc (P) thành chính nó và biến mỗi điểm M không thuộc (P) thành điểm M' sao cho (P) là mặt phẳng trung trực của MM'. Phép đối xứng qua mặt phẳng là một phép dời hình.

• Mặt phẳng (P) gọi là mặt phẳng đối xứng của một khối đa diện nếu phép đối xứng qua (P) biến khối đa diện thành chính nó.

- Phép tịnh tiến, phép đối xứng trục, phép đối xứng tâm là những phép dời hình.
- Hai hình đa diện gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến hình này thành hình kia.
- Hai hình tứ diện bằng nhau nếu chúng có các cạnh tương ứng bằng nhau.

4. • Phép vị tự tâm O tỉ số $k \neq 0$ là phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{OM'} = k.\overrightarrow{OM}$.

   • Hình $\mathscr{H}$ được gọi là đồng dạng với hình $\mathscr{H}'$ nếu có một phép vị tự biến hình $\mathscr{H}$ thành hình $\mathscr{H}_1$ mà hình $\mathscr{H}_1$ bằng hình $\mathscr{H}'$.
5. Có năm loại khối đa diện đều : khối tứ diện đều, khối lập phương, khối tám mặt đều, khối mười hai mặt đều, khối hai mươi mặt đều.
6. Thể tích của khối hộp chữ nhật bằng tích số ba kích thước.
7. Thể tích của khối chóp bằng một phần ba tích số của diện tích mặt đáy và chiều cao khối chóp.
8. Thể tích của khối lăng trụ bằng tích số của diện tích mặt đáy và chiều cao của khối lăng trụ.

II - Câu hỏi tự kiểm tra

1. Khối lăng trụ n-giác có bao nhiêu đỉnh, bao nhiêu cạnh và bao nhiêu mặt ?

   Khối chóp n-giác có bao nhiêu đỉnh, bao nhiêu cạnh và bao nhiêu mặt ?
2. Những khối đa diện đều nào có mặt là tam giác đều ? Mỗi đỉnh của nó là đỉnh chung của bao nhiêu mặt ?
3. Nếu biết thể tích của một khối chóp và diện tích mặt đáy của nó thì có thể biết được chiều cao của khối chóp đó hay không ?
4. Nếu mỗi kích thước của một khối hộp chữ nhật được tăng lên k lần thì thể tích của khối đó tăng lên bao nhiêu lần ?
5. Hình tứ diện đều, hình lập phương, hình bát diện đều có những mặt phẳng đối xứng nào ?
6. Nếu tỉ số các cạnh tương ứng của hai tứ diện đồng dạng bằng k thì tỉ số thể tích của hai khối tứ diện ấy bằng bao nhiêu ?

III - Bài tập

1. Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng V. Gọi B' *và* D' lần lượt là trung điểm của AB và AD. Mặt phẳng $(CB'D')$ chia khối tứ diện thành hai phần. Tính thể tích mỗi phần đó.

2. Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng sáu trung điểm của sáu cạnh AB, BC, CC', $C'D'$, $D'A'$ và $A'A$ nằm trên một mặt phẳng và mặt phẳng đó chia khối hộp thành hai phần có thể tích bằng nhau.

3. Cho khối tứ diện $ABCD$, E và F lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB và CD. Hai mặt phẳng (ABF) và (CDE) chia khối tứ diện $ABCD$ thành bốn khối tứ diện.

   a) Kể tên bốn khối tứ diện đó.

   b) Chứng tỏ rằng bốn khối tứ diện đó có thể tích bằng nhau.

   c) Chứng tỏ rằng nếu $ABCD$ là khối tứ diện đều thì bốn khối tứ diện nói trên bằng nhau.

4. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có diện tích đáy bằng S và $AA' = h$. Một mặt phẳng (P) cắt các cạnh AA', BB', CC' lần lượt tại A_1, B_1 và C_1. Biết $AA_1 = a, BB_1 = b, CC_1 = c$.

   a) Tính thể tích hai phần của khối lăng trụ được phân chia bởi mặt phẳng (P).

   b) Với điều kiện nào của a, b, c thì thể tích hai phần đó bằng nhau ?

5. Cho khối lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ và M là trung điểm của cạnh AB. Mặt phẳng $(B'C'M)$ chia khối lăng trụ thành hai phần. Tính tỉ số thể tích hai phần đó.

6. Cho khối chóp $S.ABC$ có đường cao $SA = a$, đáy là tam giác vuông cân có $AB = BC = a$. Gọi B' là trung điểm của SB, C' là chân đường cao hạ từ A của tam giác SAC.

   a) Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

   b) Chứng minh rằng SC vuông góc với mp$(AB'C')$.

   c) Tính thể tích khối chóp $S.AB'C'$.

IV - Câu hỏi trắc nghiệm

1. Mỗi đỉnh của hình đa diện là đỉnh chung của ít nhất

   (A) Năm cạnh ; (B) Bốn cạnh ;

   (C) Ba cạnh ; (D) Hai cạnh.

2. Cho khối chóp có đáy là n-giác. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng ?

   (A) Số cạnh của khối chóp bằng $n + 1$;

   (B) Số mặt của khối chóp bằng $2n$;

(C) Số đỉnh của khối chóp bằng $2n + 1$;

(D) Số mặt của khối chóp bằng số đỉnh của nó.

3. Phép đối xứng qua mp(P) biến đường thẳng d thành chính nó khi và chỉ khi

(A) d song song với (P) ;

(B) d nằm trên (P) ;

(C) $d \perp (P)$;

(D) d nằm trên (P) hoặc $d \perp (P)$.

4. Cho hai đường thẳng d và d' cắt nhau. Có bao nhiêu phép đối xứng qua mặt phẳng biến d thành d' ?

(A) Có một ;

(B) Có hai ;

(C) Không có ;

(D) Có vô số.

5. Cho hai đường thẳng phân biệt d và d' đồng phẳng. Có bao nhiêu phép đối xứng qua mặt phẳng biến d thành d' ?

(A) Không có ;

(B) Có một ;

(C) Có hai ;

(D) Có một hoặc hai.

6. Hình chóp tứ giác đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng ?

(A) Một ;

(B) Hai ;

(C) Ba ;

(D) Bốn.

7. Một hình hộp đứng có đáy là hình thoi (không phải hình vuông) có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng ?

(A) Một ;

(B) Hai ;

(C) Ba ;

(D) Bốn.

8. Cho phép vị tự tâm O biến điểm A thành điểm B, biết rằng $OA = 2OB$. Khi đó tỉ số phép vị tự là bao nhiêu ?

(A) 2 ;

(B) -2 ;

(C) $\pm\frac{1}{2}$;

(D) $\frac{1}{2}$.

9. Cho hai đường thẳng song song d và d', và một điểm O không nằm trên chúng. Có bao nhiêu phép vị tự tâm O biến d thành d' ?

(A) Có một ;

(B) Không có ;

(C) Có hai ;

(D) Có một hoặc không có.

10. Khối tám mặt đều thuộc loại

(A) $\{3 ; 3\}$;

(B) $\{4 ; 3\}$;

(C) $\{5 ; 3\}$;

(D) $\{3 ; 4\}$.

11. Khối hai mươi mặt đều thuộc loại

(A) $\{3 ; 4\}$; (B) $\{3 ; 5\}$;

(C) $\{4 ; 3\}$; (D) $\{4 ; 5\}$.

12. Nếu ba kích thước của một khối hộp chữ nhật tăng lên k lần thì thể tích của nó tăng lên

(A) k lần ; (B) k^2 lần ;

(C) k^3 lần ; (D) $3k^3$ lần.

13. Tổng diện tích các mặt của một hình lập phương bằng 96. Thể tích của khối lập phương đó là

(A) 64 ; (B) 91 ;

(C) 84 ; (D) 48.

14. Ba kích thước của một hình hộp chữ nhật làm thành một cấp số nhân có công bội là 2. Thể tích hình hộp đã cho là 1728. Khi đó các kích thước của hình hộp là

(A) 8, 16, 32 ; (B) 2, 4, 8 ;

(C) $2\sqrt{3}$, $4\sqrt{3}$, 38 ; (D) 6, 12, 24.

15. Các đường chéo của các mặt của một hình hộp chữ nhật bằng $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{13}$. Thể tích của hình hộp đó là

(A) 4 ; (B) 5 ;

(C) 6 ; (D) 8.

16. Một khối lăng trụ đứng tam giác có các cạnh đáy bằng 37, 13, 30 và diện tích xung quanh bằng 480. Khi đó thể tích của khối lăng trụ là

(A) 2010 ; (B) 1010 ;

(C) 1080 ; (D) 2040.

17. Một khối lăng trụ tam giác có các cạnh đáy bằng 13, 14, 15, cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy một góc 30° và có chiều dài bằng 8. Khi đó thể tích của khối lăng trụ là

(A) 340 ; (B) 336 ;

(C) $274\sqrt{3}$; (D) $124\sqrt{3}$.

18. Đáy của một hình hộp đứng là hình thoi cạnh a, góc nhọn 60°. Đường chéo lớn của đáy bằng đường chéo nhỏ của hình hộp. Khi đó thể tích của hình hộp là

(A) a^3 ;   (B) $a^3\sqrt{3}$;

(C) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$;   (D) $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$.

19. Khi độ dài cạnh của hình lập phương tăng thêm 2cm thì thể tích của nó tăng thêm $98\,\text{cm}^3$. Cạnh của hình lập phương đã cho là

(A) 4cm ;   (B) 5cm ;

(C) 6cm ;   (D) 3cm.

20. Cho một hình hộp với sáu mặt đều là hình thoi cạnh a, góc nhọn bằng 60°. Khi đó thể tích của hình hộp là

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$;   (B) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$;

(C) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$;   (D) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

21. Cho một hình lập phương có cạnh bằng a. Khi đó thể tích của khối tám mặt đều mà các đỉnh là các tâm của các mặt của hình lập phương đã cho bằng

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$;   (B) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{9}$;

(C) $\dfrac{a^3}{3}$;   (D) $\dfrac{a^3}{6}$.

22. Cho một khối tứ diện đều có cạnh bằng a. Khi đó thể tích của khối tám mặt đều mà các đỉnh là trung điểm của các cạnh của khối tứ diện đã cho là

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{24}$;   (B) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$;

(C) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$;   (D) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

23. Cho khối mười hai mặt đều $\mathscr{H}$ có thể tích V và diện tích mỗi mặt của nó bằng S. Khi đó tổng các khoảng cách từ một điểm bên trong của $\mathscr{H}$ đến các mặt của nó bằng

(A) $\dfrac{3V}{4S}$;   (B) $\dfrac{V}{4S}$;

(C) $\dfrac{3V}{S}$;   (D) $\dfrac{V}{12S}$.

24. Một khối lăng trụ tam giác có các cạnh đáy bằng 19, 20, 37, chiều cao của khối lăng trụ bằng trung bình cộng của các cạnh đáy. Khi đó thể tích của khối lăng trụ là

(A) 2888 ; (B) $1245\sqrt{2}$;

(C) 1123 ; (D) 4273.

25. Đáy của một hình hộp là một hình thoi có cạnh bằng 6cm và góc nhọn bằng 45°, cạnh bên của hình hộp dài 10cm và tạo với mặt phẳng đáy một góc 45°. Khi đó thể tích của hình hộp là

(A) $124\sqrt{3}\,\text{cm}^3$; (B) $180\,\text{cm}^3$;

(C) $120\sqrt{2}\,\text{cm}^3$; (D) $180\sqrt{2}\,\text{cm}^3$.

26. Với một tấm bìa hình vuông, người ta cắt bỏ ở mỗi góc tấm bìa một hình vuông cạnh 12cm rồi gấp lại thành một hình hộp chữ nhật không có nắp. Nếu dung tích của cái hộp đó là $4800\,\text{cm}^3$ thì cạnh tấm bìa có độ dài là

(A) 42cm ; (B) 36cm ;

(C) 44cm ; (D) 38cm.

27. Cho một hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng a và cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy một góc α. Thể tích của hình chóp đó là

(A) $\dfrac{a^3\cot\alpha}{12}$; (B) $\dfrac{a^3\tan\alpha}{12}$;

(C) $\dfrac{a^2\tan\alpha}{12}$; (D) $\dfrac{a^3\tan\alpha}{4}$.

28. Một hình chóp tam giác đều có cạnh bên bằng b và cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy một góc α. Thể tích của hình chóp là

(A) $\dfrac{3}{4}b^3\cos^2\alpha\sin\alpha$; (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}b^3\cos^2\alpha\sin\alpha$;

(C) $\dfrac{3}{4}b^3\cos\alpha\sin^2\alpha$; (D) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}b^3\cos\alpha\sin\alpha$.

29. Cho hình chóp tứ giác đều $\mathscr{H}$ có diện tích đáy bằng 4 và diện tích của một mặt bên bằng $\sqrt{2}$. Thể tích của $\mathscr{H}$ là

(A) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$; (B) 4 ;

(C) $\frac{4}{3}$; (D) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

30. Một khối chóp tam giác có các cạnh đáy bằng 6, 8, 10. Một cạnh bên có độ dài bằng 4 và tạo với đáy góc 60°. Thể tích của khối chóp đó là

(A) $16\sqrt{3}$; (B) $8\sqrt{3}$;

(C) $16\frac{\sqrt{2}}{3}$; (D) 16π .

31. Nếu một hình chóp đều có chiều cao và cạnh đáy cùng tăng lên n lần thì thể tích của nó tăng lên

(A) n^2 lần ; (B) $2n^2$ lần ;

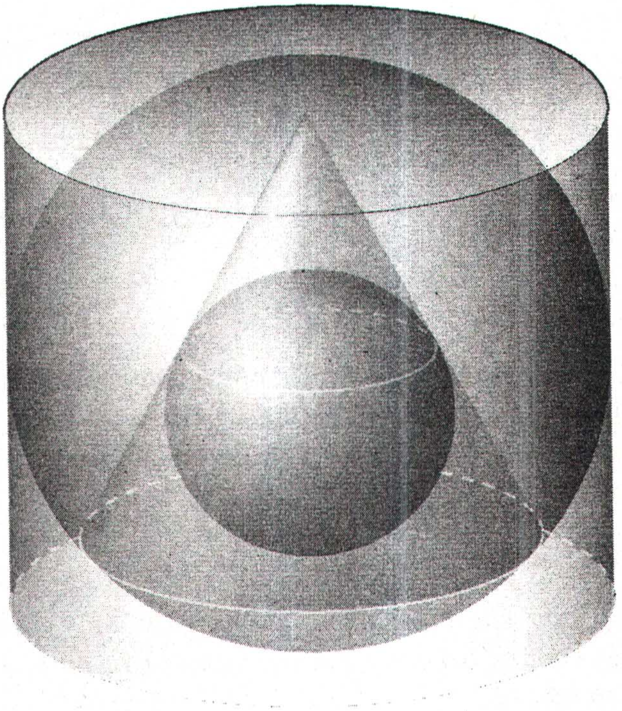
(C) n^3 lần ; (D) $2n^3$ lần.

32. Khi chiều cao của một hình chóp đều tăng lên n lần nhưng mỗi cạnh đáy giảm đi n lần thì thể tích của nó

(A) Không thay đổi ; (B) Tăng lên n lần ;

(C) Tăng lên $(n-1)$ lần ; (D) Giảm đi n lần.

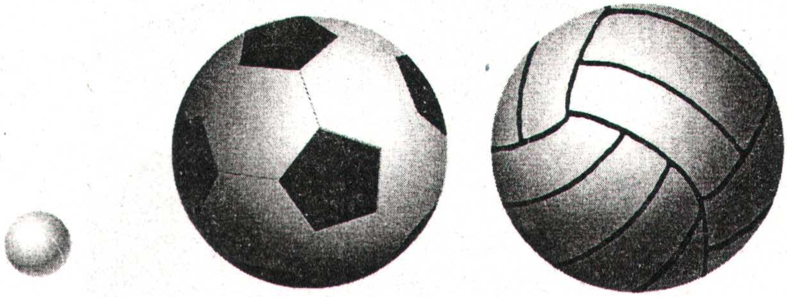
CHƯƠNG II MẶT CẦU, MẶT TRỤ, MẶT NÓN



Trong đời sống hằng ngày, chúng ta thường gặp những đồ vật có dạng hình cầu, hình trụ hoặc hình nón. Học xong chương này, học sinh cần hình dung được thế nào là mặt cầu, mặt trụ, mặt nón và những hình có quan hệ đến những mặt đó. Học sinh cần nhớ các công thức về diện tích và thể tích của hình cầu, hình trụ và hình nón.

§1 MẶT CẦU, KHỐI CẦU

1. Định nghĩa mặt cầu



Các quả bóng như bóng bàn, bóng đá, bóng chuyền cho ta hình ảnh của một hình trong không gian mà ta sẽ gọi là *mặt cầu*. Định nghĩa của mặt cầu cũng đơn giản như định nghĩa quen thuộc của đường tròn trong hình học phẳng.

ĐỊNH NGHĨA

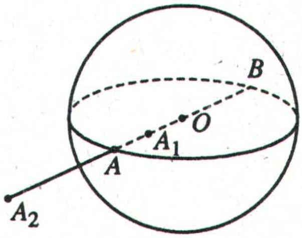
> *Tập hợp các điểm trong không gian cách điểm O cố định một khoảng R không đổi gọi là* ***mặt cầu*** *có tâm là O và bán kính bằng R.*

Mặt cầu như thế thường được kí hiệu là $S(O\,;R)$. Như vậy :

$$S(O\,;R)=\{M|OM=R\}.$$

Các thuật ngữ

Cho mặt cầu $S(O\,;R)$ và một điểm A nào đó (h.32).



Hình 32

a) Nếu $OA=R$ thì theo định nghĩa, điểm A thuộc mặt cầu. Khi đó đoạn thẳng OA cũng được gọi là *bán kính* của mặt cầu.

Nếu OA và OB là hai bán kính sao cho A, O, B thẳng hàng thì đoạn thẳng AB được gọi là *đường kính* của mặt cầu. Như vậy, một mặt cầu được xác định khi biết tâm và bán kính R hoặc khi biết một đường kính AB của nó.

b) Nếu $OA < R$ thì ta nói rằng điểm A *nằm trong* mặt cầu.

c) Nếu $OA > R$ thì ta nói rằng điểm A *nằm ngoài* mặt cầu.

Trên hình 32, ta có điểm A nằm trên mặt cầu, AB là đường kính, điểm A_1 nằm trong mặt cầu và điểm A_2 nằm ngoài mặt cầu.

d) Tập hợp các điểm thuộc mặt cầu $S(O\ ;\ R)$ cùng với các điểm nằm trong mặt cầu đó được gọi là *khối cầu* $S(O\ ;\ R)$ hoặc *hình cầu* $S(O\ ;\ R)$. Như vậy, khối cầu $S(O\ ;\ R)$ là tập hợp các điểm M sao cho $OM \le R$.

Một số ví dụ

Ví dụ 1. *Cho hai điểm A, B cố định. Chứng minh rằng tập hợp các điểm M sao cho* $\overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MB} = 0$ *là mặt cầu đường kính AB.*

Giải. Gọi I là trung điểm của AB, ta có

$$\overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MB} = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right).\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)$$

$$= \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right).\left(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}\right) = MI^2 - IA^2.$$

Suy ra $\quad \overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow MI = IA = IB$.

Vậy tập hợp các điểm M là mặt cầu tâm I bán kính $R = IA$, tức là mặt cầu đường kính AB. ■

Ví dụ 2. *Cho tứ diện đều ABCD có cạnh bằng a. Tìm tập hợp các điểm M trong không gian sao cho*

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 2a^2.$$

1 (để giải ví dụ 2)

Gọi G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$, ta có

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 + \overrightarrow{MD}^2$$

$$= \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GD}\right)^2.$$

a) Hãy tính toán tiếp để đi đến kết quả :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4MG^2 + \frac{3}{2}a^2.$$

b) Hãy kết hợp kết quả trên với đẳng thức đã cho trong bài toán để tìm giá trị của MG.

c) Phát biểu kết quả của bài toán.

2. Vị trí tương đối giữa mặt cầu và mặt phẳng

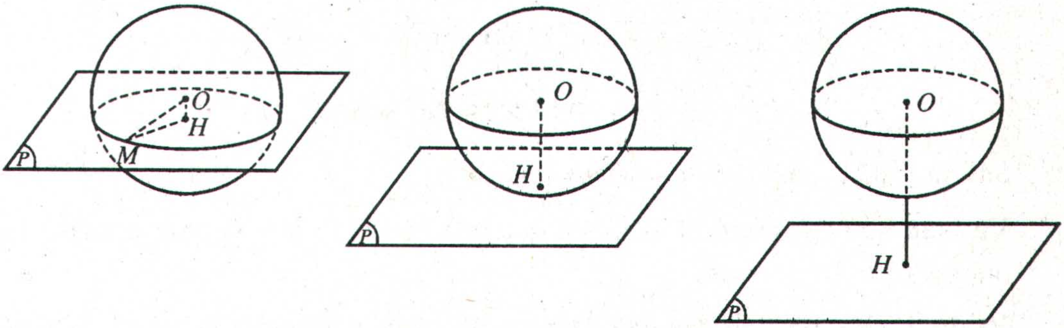
Cho mặt cầu $S(O\ ;\ R)$ và mặt phẳng (P). Hiển nhiên mặt phẳng có thể cắt hoặc không cắt mặt cầu. Nếu mặt cầu ở cách mặt phẳng quá xa thì rõ ràng là chúng không cắt nhau. Độ xa, gần của mặt cầu và mặt phẳng phụ thuộc vào bán kính R của mặt cầu và khoảng cách d từ tâm O của mặt cầu tới mặt phẳng (P). Gọi H là hình chiếu của O trên mp(P) thì $d = OH$.

2

Hãy chứng tỏ rằng điểm M là điểm chung của mặt cầu $S(O\ ;\ R)$ và mp(P) khi và chỉ khi $M \in (P)$ và $HM^2 = R^2 - d^2$ (h.33a).

3

Từ Hoạt động 2, có thể kết luận gì về giao của mặt cầu $S(O\ ;\ R)$ và mp(P) trong các trường hợp : a) $d < R$; b) $d = R$; c) $d > R$?



a) b) c)

Hình 33

Tóm lại, ta có kết luận :

> *Cho mặt cầu $S(O\ ;\ R)$ và mặt phẳng (P), gọi d là khoảng cách từ O tới (P) và H là hình chiếu của O trên (P). Khi đó :*
>
> - *Nếu $d < R$ thì mp(P) cắt mặt cầu $S(O\ ;\ R)$ theo giao tuyến là đường tròn nằm trên mặt phẳng (P) có tâm là H và có bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ (h.33a) ;*
> - *Nếu $d = R$ thì mp(P) cắt mặt cầu tại một điểm duy nhất H (h.33b) ;*
> - *Nếu $d > R$ thì mp(P) không cắt mặt cầu $S(O\ ;\ R)$ (h.33c).*

Khi $d = 0$ thì mp(P) đi qua tâm O của mặt cầu, mặt phẳng đó được gọi là *mặt phẳng kính* ; giao tuyến của mặt phẳng kính với mặt cầu là đường tròn có bán kính R, đường tròn đó gọi là *đường tròn lớn* của mặt cầu.

Trong trường hợp $d = R$, mp(P) và mặt cầu $S(O\ ;\ R)$ có điểm chung duy nhất là H. Khi đó ta nói mặt phẳng (P) *tiếp xúc* với mặt cầu tại điểm H, hoặc còn nói mp(P) là *tiếp diện* của mặt cầu tại điểm H. Điểm H gọi là *điểm tiếp xúc* (hoặc *tiếp điểm*) của (P) và mặt cầu.

$\boxed{?1}$ *Mệnh đề sau đây có đúng không : Điều kiện cần và đủ để mp(P) tiếp xúc với mặt cầu $S(O\ ;\ R)$ tại điểm H là mp(P) vuông góc với bán kính OH tại điểm H ?*

Bài toán 1

Mặt cầu đi qua mọi đỉnh của hình đa diện $\mathscr{H}$ gọi là mặt cầu ngoại tiếp hình đa diện $\mathscr{H}$ và hình đa diện $\mathscr{H}$ gọi là nội tiếp mặt cầu đó.

Chứng minh rằng hình chóp nội tiếp một mặt cầu khi và chỉ khi đáy của nó là đa giác nội tiếp một đường tròn.

4 (để giải bài toán 1)

a) Nếu hình chóp $S.A_1A_2...\ A_n$ nội tiếp một mặt cầu thì vì sao có thể kết luận rằng đa giác đáy $A_1A_2...A_n$ nội tiếp một đường tròn ? Đó là đường tròn nào ?

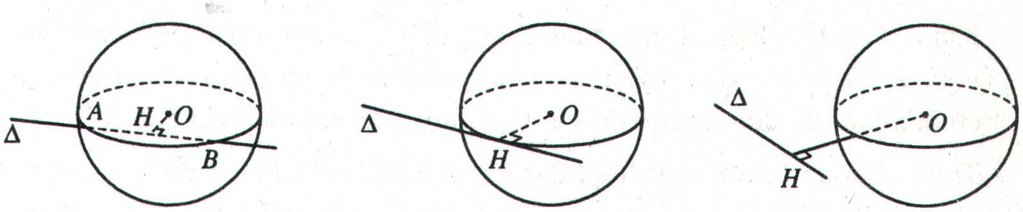
b) Cho hình chóp có đa giác đáy $A_1A_2...\ A_n$ nội tiếp đường tròn tâm I. Hãy xác định điểm O cách đều tất cả các đỉnh của hình chóp. Từ đó suy ra hình chóp nội tiếp một mặt cầu.

$\boxed{?2}$ *Tại sao có thể nói : hình tứ diện nào cũng có mặt cầu ngoại tiếp ?*

$\boxed{?3}$ *Hình lăng trụ tam giác có cạnh bên không vuông góc với đáy có thể nội tiếp một mặt cầu không ? Vì sao ?*

3. Vị trí tương đối giữa mặt cầu và đường thẳng

Cho mặt cầu $S(O\ ;\ R)$ và đường thẳng Δ. Gọi H là hình chiếu của O trên Δ và $d = OH$ là khoảng cách từ O tới Δ. Hoàn toàn tương tự như trong trường hợp mặt cầu và mặt phẳng, ta có các kết luận sau đây (h.34) :



a) b) c)

Hình 34

- *Nếu d < R thì Δ cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt (h.34a) ;*
- *Nếu d = R thì Δ cắt mặt cầu tại một điểm duy nhất (h.34b) ;*
- *Nếu d > R thì Δ không cắt mặt cầu (h.34c).*

Trong trường hợp $d = R$, đường thẳng Δ và mặt cầu $S(O\ ;\ R)$ có điểm chung duy nhất là H. Khi đó, ta nói đường thẳng Δ *tiếp xúc* với mặt cầu tại điểm H hoặc còn nói Δ là *tiếp tuyến* của mặt cầu tại H. Điểm H gọi là *điểm tiếp xúc* (hoặc *tiếp điểm)* của Δ và mặt cầu.

$\boxed{?4}$ *Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng ?*

1) *Điều kiện cần và đủ để đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu S(O ; R) tại điểm H là Δ vuông góc với bán kính OH tại điểm H.*

2) *Có vô số đường thẳng tiếp xúc với mặt cầu S(O ; R) tại điểm H, chúng nằm trên mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại H.*

Bài toán 2. *Hãy chứng minh rằng có một mặt cầu tiếp xúc với các cạnh của một tứ diện đều ABCD cho trước.*

5 (để giải bài toán)

Gọi *O* là trọng tâm của tứ diện đều *ABCD*. Hãy chứng minh rằng khoảng cách từ *O* tới các cạnh của tứ diện đó đều bằng nhau.

$\boxed{?5}$ *Đường thẳng đi qua điểm A nằm trong mặt cầu có tiếp xúc với mặt cầu hay không ?*

Trong trường hợp điểm A nằm ngoài mặt cầu, ta có định lí sau :

ĐỊNH LÍ

Nếu điểm A nằm ngoài mặt cầu S(O ; R) thì :

a) Qua A có vô số tiếp tuyến với mặt cầu.

b) Độ dài các đoạn thẳng nối A với các tiếp điểm đều bằng nhau.

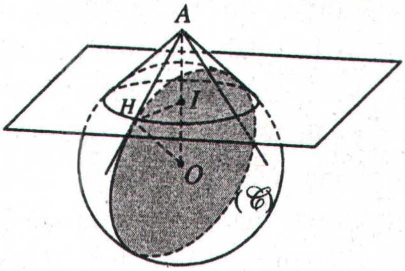
c) Tập hợp các tiếp điểm là một đường tròn nằm trên mặt cầu.

6 (để chứng minh định lí)

a) Lấy một mặt phẳng bất kì đi qua AO (h.35), nó cắt mặt cầu $S(O\ ;\ R)$ theo một đường tròn $(\mathscr{C})$. Gọi AH là một tiếp tuyến của đường tròn đó tại H. Chứng minh rằng AH cũng tiếp xúc với mặt cầu tại điểm H.

b) Tính độ dài đoạn AH theo R và $d = OA$.

c) Kẻ HI vuông góc với OA tại I rồi chứng minh rằng I là điểm cố định không phụ thuộc vào tiếp tuyến AH. Từ đó suy ra kết luận c) trong định lí.



Hình 35

4. Diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu

Ta đã biết thế nào là diện tích của các đa giác phẳng. Ta định nghĩa *diện tích của hình đa diện* là tổng diện tích các mặt của nó.

Tuy mặt cầu không giống như hình đa diện vì nó không phải là hợp của các đa giác, nhưng hiển nhiên là nó cũng phải có một "diện tích" nào đó. Nếu để sơn một mặt cầu, ta phải dùng 1kg sơn và cũng với 1kg sơn loại đó, ta có thể sơn được một hình chữ nhật (với độ mỏng của lớp sơn như nhau) thì có thể xem diện tích của mặt cầu bằng diện tích hình chữ nhật.

Sau đây ta nêu ra cách định nghĩa diện tích của mặt cầu và nói rõ hơn về công thức tính diện tích đó. Cũng tương tự như vậy đối với thể tích của khối cầu.

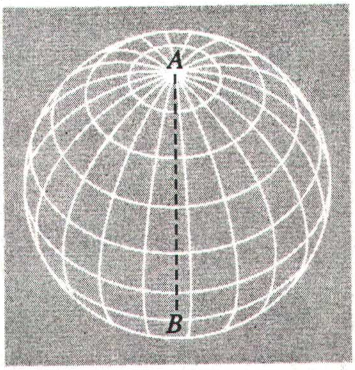
Khái niệm về diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu

Cho mặt cầu đường kính AB (h.36).

Mỗi nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AB cắt mặt cầu theo một nửa đường tròn đường kính AB. Ta gọi các nửa đường tròn đó là các *kinh tuyến* ứng với đường kính AB.

Mỗi mặt phẳng vuông góc với AB nếu cắt mặt cầu theo một đường tròn thì đường tròn đó gọi là *vĩ tuyến* ứng với đường kính AB.

Nếu xem bề mặt Trái Đất là một mặt cầu có cực bắc là A, cực nam là B thì các kinh tuyến, vĩ tuyến nói trên chính là các kinh tuyến, vĩ tuyến của Trái Đất.



Hình 36

Chúng ta hãy lấy một số kinh tuyến và vĩ tuyến ứng với đường kính AB của mặt cầu. Chúng sẽ chia mặt cầu thành nhiều mảnh, có thể gọi mỗi mảnh đó là một "tứ giác cầu" (đặc biệt có thể là "tam giác cầu"). Ta có thể thấy rằng bốn đỉnh của một "tứ giác cầu" nằm trên một mặt phẳng, và do đó cũng là bốn đỉnh của một tứ giác phẳng (đúng ra là hình thang cân) mà ta sẽ gọi là "xấp xỉ phẳng" của tứ giác cầu đang xét. Tương tự, mỗi "tam giác cầu" cũng có "xấp xỉ phẳng" là một tam giác cân. Tập hợp các "xấp xỉ phẳng" của tứ giác cầu và tam giác cầu làm thành một hình đa diện $\mathscr{D}$ nội tiếp mặt cầu. Hình đa diện $\mathscr{D}$ gọi là *đa diện xấp xỉ* của mặt cầu.

Người ta chứng minh được rằng :

1) *Khi độ dài các cạnh của $\mathscr{D}$ tiến tới 0 thì diện tích của hình đa diện $\mathscr{D}$ tiến tới một giới hạn xác định.* Giới hạn đó được gọi là *diện tích* của mặt cầu.

2) *Khi độ dài các cạnh của $\mathscr{D}$ tiến tới 0 thì thể tích của khối đa diện $\mathscr{D}$ tiến tới một giới hạn xác định.* Giới hạn đó được gọi là *thể tích* của khối cầu.

Các công thức

Dựa vào định nghĩa trên và dùng phương pháp giới hạn, người ta chứng minh được các công thức về diện tích của mặt cầu và thể tích của khối cầu như sau :

Mặt cầu bán kính R có diện tích là : $S = 4\pi R^2$.

Khối cầu bán kính R có thể tích là : $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

Câu hỏi và bài tập

1. Trong không gian cho ba đoạn thẳng AB, BC, CD sao cho $AB \perp BC$, $BC \perp CD$, $CD \perp AB$. Chứng minh rằng có mặt cầu đi qua bốn điểm A, B, C, D. Tính bán kính mặt cầu đó nếu $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$.

2. a) Tìm tập hợp tâm các mặt cầu đi qua hai điểm phân biệt A, B cho trước.

b) Tìm tập hợp tâm các mặt cầu đi qua ba điểm phân biệt A, B, C cho trước.

c) Tìm tập hợp tâm các mặt cầu đi qua một đường tròn cho trước.

d) Có hay không một mặt cầu đi qua một đường tròn và một điểm nằm ngoài mặt phẳng của đường tròn ?

3. Cho điểm M nằm trong mặt cầu (S). Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng ?

a) Mọi mặt phẳng đi qua M đều cắt (S) theo một đường tròn.

b) Mọi đường thẳng đi qua M đều cắt (S) tại hai điểm phân biệt.

4. Cho đường thẳng d và điểm A không nằm trên d. Xét các mặt cầu đi qua A và có tâm nằm trên d. Chứng minh rằng các mặt cầu đó luôn đi qua một đường tròn cố định.

5. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng ?

a) Nếu hình đa diện nội tiếp mặt cầu thì mọi mặt của nó là đa giác nội tiếp đường tròn.

b) Nếu các mặt của đa diện nội tiếp đường tròn thì đa diện đó nội tiếp mặt cầu.

6. a) Tìm tập hợp tâm các mặt cầu tiếp xúc với ba cạnh của một tam giác cho trước.

b) Chứng minh rằng nếu có mặt cầu tiếp xúc với sáu cạnh của hình tứ diện $ABCD$ thì

$$AB + CD = AC + BD = AD + BC.$$

7. a) Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng h.

b) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh cùng bằng a. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC, SD. Chứng minh rằng các điểm A, B, C, D, A', B', C', D' cùng thuộc một mặt cầu và tính thể tích khối cầu đó.

8. Cho tứ diện $ABCD$ với $AB = CD = c$, $AC = BD = b$, $AD = BC = a$.

a) Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.

b) Chứng minh rằng có một mặt cầu tiếp xúc với bốn mặt của hình tứ diện (nó được gọi là mặt cầu *nội tiếp* tứ diện).

9. Tìm diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ biết rằng $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$ và ba cạnh SA, SB, SC đôi một vuông góc. Chứng minh rằng các điểm S, G, I thẳng hàng, trong đó G là trọng tâm tam giác ABC và I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

10. a) Chứng minh rằng một hình lăng trụ có mặt cầu ngoại tiếp khi và chỉ khi nó là hình lăng trụ đứng với đáy là đa giác nội tiếp đường tròn.

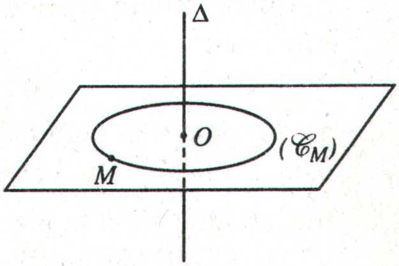
b) Trong số các hình hộp nội tiếp mặt cầu cho trước, hình hộp nào có diện tích toàn phần lớn nhất ?

§2 KHÁI NIỆM VỀ MẶT TRÒN XOAY

Mặt cầu là một trường hợp đơn giản của các mặt tròn xoay mà ta sẽ nói đến trong mục này.

Trước hết, ta định nghĩa *trục của đường tròn* : Trục của đường tròn $(O\,;R)$ là đường thẳng đi qua O và vuông góc với mặt phẳng chứa đường tròn đó.

Dễ thấy rằng khi điểm M không nằm trên đường thẳng Δ thì có một đường tròn duy nhất đi qua M và có trục là Δ, ta kí hiệu đường tròn đó là $(\mathscr{C}_M)$ (h.37).



Hình 37

? *Đường tròn $(\mathscr{C}_M)$ được xác định như thế nào ?*

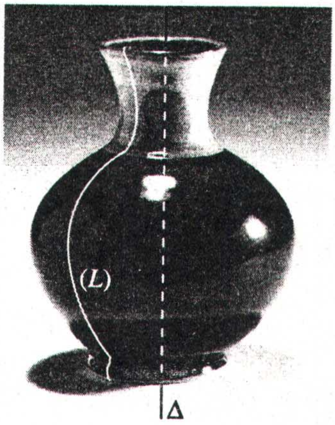
Trong trường hợp điểm M nằm trên Δ, ta quy ước "đường tròn" $(\mathscr{C}_M)$ chỉ gồm duy nhất điểm M.

1. Định nghĩa

> *Trong không gian, cho hình $\mathscr{H}$ và đường thẳng Δ. Hình gồm tất cả các đường tròn $(\mathscr{C}_M)$ với M thuộc $\mathscr{H}$ được gọi là **hình tròn xoay** sinh bởi $\mathscr{H}$ khi quay quanh Δ. Đường thẳng Δ gọi là **trục** của hình tròn xoay đó.*
>
> *Khi hình $\mathscr{H}$ là một đường thì hình tròn xoay sinh bởi nó còn gọi là **mặt tròn xoay**.*

Lọ hoa ở hình 38 cho ta hình ảnh của một mặt tròn xoay. Mặt tròn xoay đó sinh bởi đường (L) khi quay quanh đường thẳng Δ.

Nói chung, các đồ gốm nếu được chế tạo bằng cách dùng bàn xoay đều có dạng là các mặt tròn xoay.

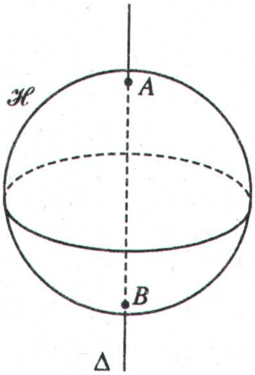


Hình 38

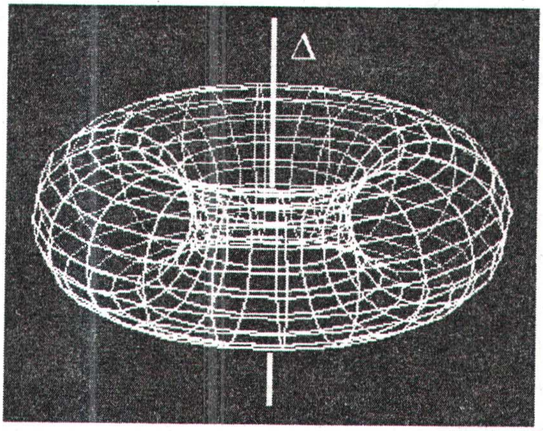
2. Một số ví dụ

Ví dụ 1. *Nếu hình $\mathscr{H}$ là đường tròn có đường kính AB nằm trên đường thẳng Δ thì rõ ràng hình tròn xoay sinh bởi $\mathscr{H}$ khi quay quanh Δ là mặt cầu đường kính AB (h.39).*

Nếu $\mathscr{H}$ là hình tròn có đường kính AB nằm trên đường thẳng Δ thì hình tròn xoay sinh bởi $\mathscr{H}$ khi quay quanh Δ là khối cầu đường kính AB (h.39).



Hình 39



Hình 40

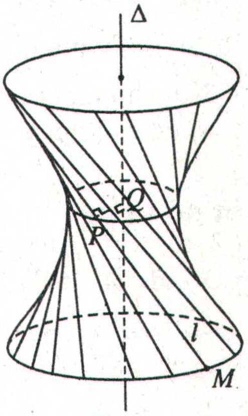
Ta xét trường hợp $\mathscr{H}$ là đường tròn nằm trong cùng một mặt phẳng với đường thẳng Δ nhưng không cắt Δ. Hình tròn xoay sinh bởi đường tròn đó khi quay quanh Δ được gọi là ***mặt xuyến*** *(h.40).*

Ví dụ 2. *Cho hai đường thẳng Δ và l chéo nhau. Xét hình tròn xoay sinh bởi đường thẳng l khi quay quanh đường thẳng Δ.*

Gọi PQ là đường vuông góc chung của hai đường thẳng Δ và l $(P \in l, Q \in \Delta)$ (h.41). Khi đó $(\mathscr{C}_P)$ là đường tròn có bán kính bé nhất (bằng PQ). Các đường tròn $(\mathscr{C}_M)$ có bán kính càng lớn khi M thuộc l càng cách xa điểm P.

Trong trường hợp này, hình tròn xoay nhận được gọi là ***mặt hypeboloit tròn xoay một tầng****. (Sở dĩ có tên gọi này là vì mặt tròn xoay đó có thể sinh bởi một hypebol khi quay quanh trục ảo của nó).*

Trong các §3 và §4, chúng ta sẽ xét hình tròn xoay sinh bởi đường thẳng l khi quay quanh đường thẳng Δ trong trường hợp hai đường thẳng đó cùng nằm trong một mặt phẳng.



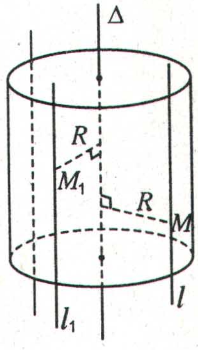
Hình 41

§3 MẶT TRỤ, HÌNH TRỤ VÀ KHỐI TRỤ

1. Định nghĩa mặt trụ

Cho đường thẳng Δ. Xét một đường thẳng l song song với Δ, cách Δ một khoảng R (h.42).

> *Mặt tròn xoay sinh bởi đường thẳng l như thế khi quay quanh Δ được gọi là* ***mặt trụ tròn xoay*** *(hoặc đơn giản là* ***mặt trụ****).*



Hình 42

Δ gọi là *trục* của mặt trụ, l gọi là *đường sinh* của mặt trụ và R gọi là *bán kính* của mặt trụ.

Chúng ta dễ dàng nhận thấy :

a) Mặt trụ nói trên là tập hợp tất cả các điểm M cách đường thẳng Δ cố định một khoảng R không đổi.

b) Nếu M_1 là một điểm bất kì nằm trên mặt trụ thì đường thẳng l_1 đi qua M_1 và song song với Δ sẽ nằm trên mặt trụ đó (vì mọi điểm của l_1 đều cách Δ một khoảng R). Như vậy, có thể xem mặt trụ sinh bởi đường thẳng l_1, nói cách khác, đường thẳng l_1 cũng là một đường sinh của mặt trụ.

Cho mặt trụ $\mathcal{T}$ có trục Δ và bán kính R. Giao của mặt trụ $\mathcal{T}$ và mặt phẳng (P) là hình gì trong các trường hợp sau đây ?

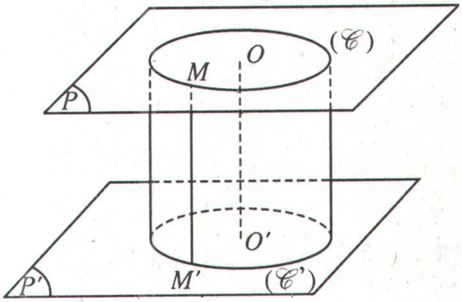
a) Mặt phẳng (P) đi qua Δ.

b) Mặt phẳng (P) song song với Δ.

c) Mặt phẳng (P) vuông góc với Δ.

2. Hình trụ và khối trụ

Cắt mặt trụ $\mathcal{T}$ trục Δ, bán kính R bởi hai mặt phẳng phân biệt (P) và (P') cùng vuông góc với Δ, ta được giao tuyến là hai đường tròn $(\mathscr{C})$ và $(\mathscr{C}')$ (h.43).



Hình 43

> *Phần mặt trụ $\mathcal{T}$ nằm giữa hai mặt phẳng (P) và (P') cùng với hai hình tròn xác định bởi $(\mathscr{C})$ và $(\mathscr{C}')$ được gọi là* ***hình trụ***.

Hai đường tròn $(\mathscr{C})$ và $(\mathscr{C}')$ gọi là hai *đường tròn đáy*, hai hình tròn xác định bởi chúng gọi là hai *mặt đáy* của hình trụ, bán kính của chúng (bằng R) gọi là *bán kính* của hình trụ. Khoảng cách giữa hai mặt đáy gọi là *chiều cao* của hình trụ.

Nếu gọi O và O' là tâm của hai hình tròn đáy thì đoạn thẳng OO' (nằm trên Δ) gọi là *trục* của hình trụ.

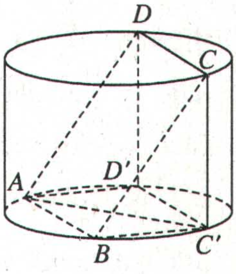
Phần mặt trụ nằm giữa hai đáy gọi là *mặt xung quanh* của hình trụ.

Với mỗi điểm $M \in (\mathscr{C})$, có một điểm $M' \in (\mathscr{C}')$ sao cho $MM' \parallel OO'$. Hiển nhiên đoạn thẳng MM' nằm trên mặt xung quanh của hình trụ, có độ dài bằng chiều cao của hình trụ. Các đoạn thẳng như vậy gọi là *đường sinh* của hình trụ.

Ta cũng dễ thấy rằng mỗi hình trụ phân chia không gian thành hai phần, phần bên trong hình trụ và phần bên ngoài hình trụ.

> *Hình trụ cùng với phần bên trong của nó được gọi là* ***khối trụ****.*

Ví dụ 1. *Cho hình trụ có bán kính R và chiều cao cũng bằng R. Một hình vuông ABCD có hai cạnh AB và CD lần lượt là dây cung của hai đường tròn đáy, cạnh AD và BC không phải là đường sinh của hình trụ. Tính cạnh của hình vuông đó.*



Hình 44

Giải. Gọi C', D' lần lượt là hình chiếu của C, D trên mặt đáy chứa AB thì dễ thấy $ABC'D'$ là hình chữ nhật (h.44). Do đó $AC' = 2R$. Từ các tam giác vuông ABC' và CBC', ta có

$$BC'^2 = AC'^2 - AB^2 = 4R^2 - AB^2\ ;$$

$$BC'^2 = BC^2 - CC'^2 = AB^2 - R^2.$$

Suy ra $2AB^2 = 5R^2$ hay $AB = \dfrac{R\sqrt{10}}{2}$. ■

3. Diện tích hình trụ và thể tích khối trụ

Một hình lăng trụ gọi là *nội tiếp* một hình trụ nếu hai đáy của hình lăng trụ nội tiếp hai đường tròn đáy của hình trụ. Khi đó, ta còn nói hình trụ *ngoại tiếp* hình lăng trụ.

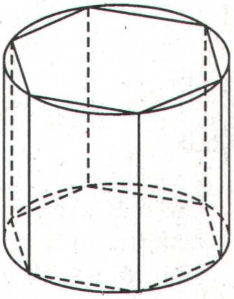
Ta có định nghĩa :

> ***Diện tích xung quanh*** *của hình trụ là giới hạn của diện tích xung quanh của hình lăng trụ đều nội tiếp hình trụ đó khi số cạnh đáy tăng lên vô hạn.*
>
> ***Thể tích*** *của khối trụ (còn gọi là thể tích của hình trụ) là giới hạn của thể tích của hình lăng trụ đều nội tiếp hình trụ đó khi số cạnh đáy tăng lên vô hạn.*

Cho hình trụ $\mathcal{T}$ có chiều cao h và bán kính R. Giả sử $\mathscr{H}$ là một hình lăng trụ đều nội tiếp hình trụ $\mathcal{T}$ (h.45). Gọi S là diện tích xung quanh của hình lăng trụ $\mathscr{H}$ và V là thể tích của khối lăng trụ $\mathscr{H}$.

Ta biết rằng $S = p.h$, trong đó p là chu vi đáy của lăng trụ $\mathscr{H}$, và $V = S_{\text{đáy}}.h$, trong đó $S_{\text{đáy}}$ là diện tích đáy của hình lăng trụ $\mathscr{H}$. Ta lại biết rằng khi số cạnh đáy của hình lăng trụ $\mathscr{H}$ tăng lên vô hạn thì chu vi p và diện tích $S_{\text{đáy}}$ lần lượt có giới hạn là chu vi và diện tích của hình tròn đáy của hình trụ $\mathscr{T}$.

Vậy ta có :



Hình 45

Diện tích xung quanh của hình trụ bằng chu vi đáy nhân với chiều cao.

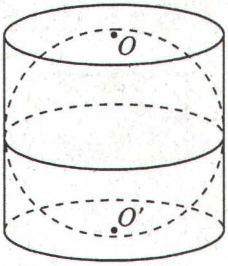
Thể tích của khối trụ bằng diện tích đáy nhân với chiều cao.

Ví dụ 2. *Cho hình trụ $\mathscr{T}$ có bán kính R, trục OO' bằng $2R$ và mặt cầu (S) có đường kính OO' (h.46).*

1) Hãy so sánh diện tích mặt cầu và diện tích xung quanh của hình trụ.

2) Hãy so sánh diện tích mặt cầu và diện tích toàn phần của hình trụ (diện tích toàn phần của hình trụ là tổng diện tích xung quanh và diện tích hai đáy của nó).

3) Hãy so sánh thể tích của khối trụ $\mathscr{T}$ và khối cầu (S).



Hình 46

Giải

1) Dễ thấy rằng diện tích của mặt cầu và diện tích xung quanh của hình trụ bằng nhau và bằng $4\pi R^2$.

2) Diện tích toàn phần của hình trụ bằng $4\pi R^2 + 2\pi R^2 = 6\pi R^2$.

Vậy diện tích mặt cầu bằng $\frac{2}{3}$ diện tích toàn phần của hình trụ.

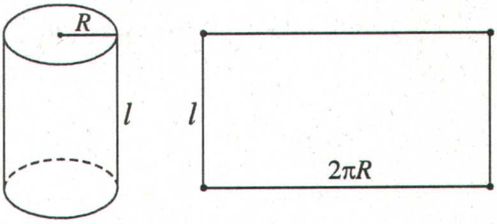
3) Thể tích của khối cầu là $V_{(S)} = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Thể tích của khối trụ là $V_{\mathscr{T}} = \pi R^2.2R = 2\pi R^3$.

Vậy thể tích của khối cầu bằng $\frac{2}{3}$ thể tích của khối trụ. ■

Em hãy làm thử

Cắt mặt xung quanh của hình trụ (tức hình trụ bỏ đi hai đáy) theo một đường sinh rồi trải ra trên một mặt phẳng thì ta được một hình chữ nhật có một cạnh bằng đường sinh l và cạnh kia bằng chu vi đường tròn đáy. Khi đó, diện tích hình chữ nhật bằng diện tích xung quanh của hình trụ (h.47).



Hình 47

Bài đọc thêm

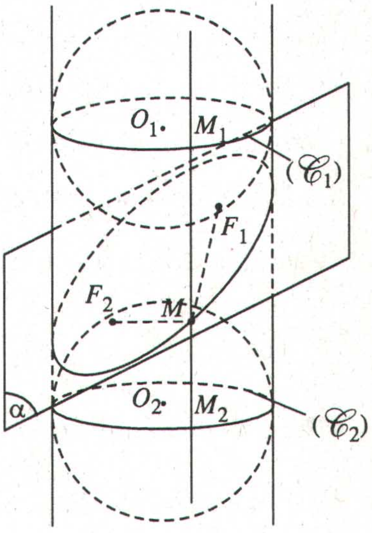
GIAO TUYẾN ELIP CỦA MẶT TRỤ TRÒN XOAY VÀ MẶT PHẲNG

Cho mặt trụ tròn xoay $\mathcal{T}$ có trục là Δ và bán kính R. Xét giao của $\mathcal{T}$ với một mp(α). Ta biết rằng :

– Nếu (α) vuông góc với Δ thì giao là một đường tròn có bán kính R.

– Nếu (α) song song với Δ thì giao có thể là hai đường sinh, một đường sinh hoặc là tập rỗng.

Bây giờ, giả sử (α) là mặt phẳng cắt Δ nhưng không vuông góc với Δ (h.48). Ta hãy xem giao của (α) và $\mathcal{T}$ là hình gì ?



Hình 48

Ta hãy lấy một mặt cầu bán kính R bỏ vào mặt trụ từ trên xuống cho đến khi nó dừng lại vì tiếp xúc với mp(α). Như vậy là ta có mặt cầu $S(O_1\,;R)$ tiếp xúc với mọi đường sinh của mặt trụ $\mathcal{T}$ và tiếp xúc với mp(α) tại điểm F_1. Hiển nhiên các tiếp điểm của mặt cầu $S(O_1\,;R)$ với các đường sinh luôn nằm trên đường tròn ($\mathscr{C}_1$) là giao tuyến của mặt trụ với mp(P_1) vuông góc với Δ tại O_1. Tương tự, ta lấy một mặt cầu khác cũng có bán kính R để vào trong mặt trụ từ phía dưới và đẩy lên cho nó tiếp xúc với mp(α).

Như vậy ta có mặt cầu $S(O_2\ ;\ R)$ tiếp xúc với mọi đường sinh của $\mathcal{T}$ và tiếp xúc với mp(α) tại điểm F_2. Các tiếp điểm của mặt cầu này với các đường sinh luôn nằm trên đường tròn $(\mathscr{C}_2)$ là giao tuyến của mặt trụ $\mathcal{T}$ với mp(P_2) vuông góc với Δ tại O_2.

Giả sử M là một điểm thuộc $(\alpha) \cap \mathcal{T}$. Vì M nằm trên (α) nên MF_1 tiếp xúc với mặt cầu $S(O_1\ ;\ R)$ tại F_1 và MF_2 tiếp xúc với mặt cầu $S(O_2, R)$ tại F_2. Vì M nằm trên $\mathcal{T}$ nên có đường sinh của $\mathcal{T}$ đi qua M. Giả sử đường sinh đó cắt các đường tròn $(\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2)$ lần lượt tại M_1 và M_2 thì MM_1 và MM_2 lần lượt là tiếp tuyến của mặt cầu $S(O_1\ ;\ R)$ và $S(O_2\ ;\ R)$. Từ đó ta có $MF_1 = MM_1$ và $MF_2 = MM_2$, do đó

$$MF_1 + MF_2 = MM_1 + MM_2 = M_1M_2 = O_1O_2.$$

Như vậy, $(\alpha) \cap \mathcal{T}$ là đường elip nằm trên (α), có các tiêu điểm là F_1, F_2 và độ dài trục lớn bằng O_1O_2.

Tóm lại : *Nếu cắt mặt trụ tròn xoay bởi một mặt phẳng cắt trục và không vuông góc với trục của mặt trụ thì giao tuyến là một đường elip.*

Câu hỏi và bài tập

11. Chứng minh rằng hình tròn xoay có vô số mặt phẳng đối xứng.

12. Trong mỗi trường hợp sau, gọi tên các hình tròn xoay :

a) Sinh bởi ba cạnh của hình chữ nhật khi quay quanh đường thẳng chứa cạnh thứ tư.

b) Sinh bởi một hình chữ nhật (kể cả điểm trong) khi quay quanh đường thẳng chứa một cạnh.

13. Cho đường tròn $(O\ ;\ R)$ nằm trong mặt phẳng (P). Tìm tập hợp các điểm M trong không gian sao cho hình chiếu của chúng trên (P) luôn nằm trên đường tròn đã cho.

14. Chứng minh rằng các tiếp tuyến của mặt cầu song song với một đường thẳng cố định luôn nằm trên một mặt trụ xác định.

15. Một mặt phẳng đi qua trục của hình trụ $\mathcal{T}$, cắt hình trụ theo thiết diện là hình vuông cạnh $2R$.

a) Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình trụ $\mathcal{T}$.

b) Tính thể tích của khối trụ $\mathcal{T}$.

c) Tính thể tích khối lăng trụ tứ giác đều nội tiếp hình trụ $\mathcal{T}$.

16. Một hình trụ $\mathcal{T}$ có bán kính R và chiều cao $R\sqrt{3}$.

a) Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình trụ $\mathcal{T}$.

b) Tính thể tích của khối trụ giới hạn bởi hình trụ $\mathcal{T}$.

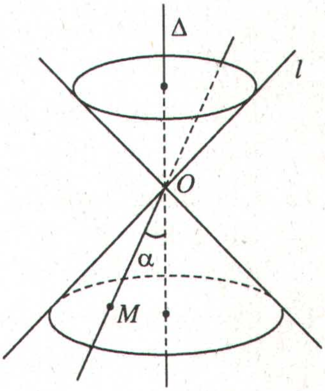
c) Cho hai điểm A và B lần lượt nằm trên hai đường tròn đáy sao cho góc giữa AB và trục của hình trụ bằng 30°. Tính khoảng cách giữa AB và trục của hình trụ $\mathcal{T}$.

§4 MẶT NÓN, HÌNH NÓN VÀ KHỐI NÓN

1. Định nghĩa mặt nón

Cho đường thẳng Δ. Xét một đường thẳng l cắt Δ tại O tạo thành một góc α với $0^{\circ} < \alpha < 90^{\circ}$ (h.49).

> *Mặt tròn xoay sinh bởi đường thẳng l như thế khi quay quanh Δ gọi là* ***mặt nón tròn xoay*** *(hay đơn giản là* ***mặt nón****).*



Hình 49

Δ gọi là *trục* của mặt nón.

l gọi là *đường sinh* của mặt nón.

O gọi là *đỉnh* của mặt nón.

Góc 2α gọi là *góc ở đỉnh* của mặt nón.

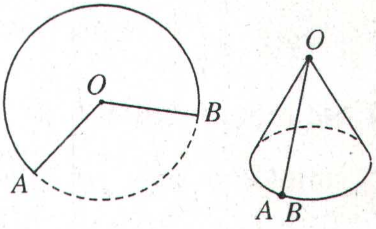
Chúng ta dễ dàng nhận thấy :

Nếu M là một điểm tuỳ ý của mặt nón $\mathcal{N}$ khác với điểm O thì đường thẳng OM nằm hoàn toàn trên mặt nón đó. Có thể xem mặt nón $\mathcal{N}$ sinh bởi đường thẳng OM khi quay quanh Δ. Bởi thế, OM cũng được gọi là đường sinh của mặt nón đó.

Em hãy làm thử

Các em hãy lấy một miếng bìa, cắt thành hình quạt tròn giới hạn bởi một cung tròn *AB* và hai bán kính *OA*, *OB* (h.50). Ta uốn cong hình quạt tròn đó để có thể dán hai bán kính *OA* và *OB* với nhau.

Sau khi dán, cung tròn *AB* trở thành một đường khép kín. Nếu ta làm cho đường khép kín này trở thành một đường tròn thì ta được một phần của mặt nón tròn xoay.



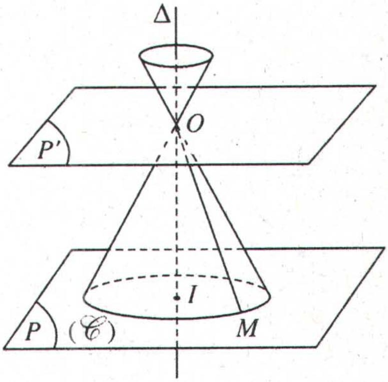
Hình 50

?1 *a) Giao của một mặt nón và một mặt phẳng đi qua trục của nó là hình gì ?*

b) Giao của một mặt nón và một mặt phẳng vuông góc với trục của nó là hình gì ?

2. Hình nón và khối nón

Cho mặt nón $\mathcal{N}$ với trục Δ, đỉnh O và góc ở đỉnh 2α. Gọi (P) là mặt phẳng vuông góc với Δ tại điểm I khác O (h.51). Mặt phẳng (P) cắt mặt nón theo đường tròn $(\mathscr{C})$ có tâm I. Lại gọi (P') là mặt phẳng vuông góc với Δ tại O. Khi đó



Hình 51

> *Phần của mặt nón $\mathcal{N}$ giới hạn bởi hai mặt phẳng (P) và (P') cùng với hình tròn xác định bởi $(\mathscr{C})$ được gọi là* ***hình nón****.*

Điểm O gọi là *đỉnh* của hình nón, đường tròn $(\mathscr{C})$ gọi là *đường tròn đáy*, hình tròn xác định bởi $(\mathscr{C})$ gọi là *đáy* của hình nón. Với mỗi điểm M nằm trên đường tròn $(\mathscr{C})$, đoạn thẳng OM gọi là *đường sinh* của hình nón ; rõ ràng là các đường sinh của hình nón có độ dài bằng nhau. Đoạn thẳng OI gọi là *trục* của hình nón, độ dài OI gọi là *chiều cao* của hình nón (đó chính là khoảng cách từ đỉnh O tới mặt đáy).

?2 *Giao của một hình nón và một mặt phẳng đi qua trục của nó là hình gì ?*

Hiển nhiên là một hình nón chia không gian thành hai phần : phần bên trong và phần bên ngoài của nó.

> *Hình nón cùng với phần bên trong của nó gọi là* ***khối nón****.*

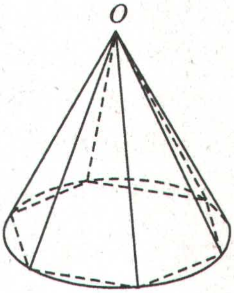
3. Khái niệm về diện tích hình nón và thể tích khối nón

Một hình chóp gọi là *nội tiếp* một hình nón nếu đáy của hình chóp là đa giác nội tiếp đáy của hình nón và đỉnh của hình chóp là đỉnh hình nón.

Ta có định nghĩa :

> ***Diện tích xung quanh*** *của hình nón là giới hạn của diện tích xung quanh của hình chóp đều nội tiếp hình nón đó khi số cạnh đáy tăng lên vô hạn.*
>
> ***Thể tích*** *của khối nón (còn gọi là thể tích của hình nón) là giới hạn của thể tích của hình chóp đều nội tiếp hình nón đó khi số cạnh đáy tăng lên vô hạn.*

Giả sử $\mathscr{H}$ là một hình chóp đều nội tiếp hình nón $\mathfrak{N}$ (h.52). Gọi p là chu vi đáy của hình chóp đều $\mathscr{H}$, và q là khoảng cách từ O tới một cạnh đáy của $\mathscr{H}$ thì diện tích xung quanh của $\mathscr{H}$ là $S_{xq} = \frac{1}{2}p.q$. Khi cho số cạnh đáy của $\mathscr{H}$ tăng lên vô hạn thì p có giới hạn là độ dài đường tròn đáy của hình nón $\mathfrak{N}$, còn q có giới hạn là độ dài đường sinh của hình nón. Vậy :



Hình 52

> *Diện tích xung quanh của hình nón bằng một nửa tích số của độ dài đường tròn đáy và độ dài đường sinh.*

Cũng chú ý rằng thể tích V của khối chóp $\mathscr{H}$ bằng $\frac{1}{3}$ tích số của diện tích đa giác đáy và chiều cao của $\mathscr{H}$ (cũng là chiều cao của khối nón). Khi số cạnh đáy của $\mathscr{H}$ tăng lên vô hạn thì diện tích đa giác đáy của $\mathscr{H}$ có giới hạn là diện tích hình tròn đáy của khối nón $\mathfrak{N}$. Bởi vậy :

> *Thể tích khối nón bằng một phần ba tích số diện tích hình tròn đáy và chiều cao.*

Ví dụ. *Cắt một hình nón $\mathcal{N}$ bằng một mặt phẳng đi qua trục của nó, ta được thiết diện là một tam giác đều cạnh 2a. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần (tức là tổng của diện tích xung quanh và diện tích đáy) và thể tích của khối nón $\mathcal{N}$.*

Giải

Giả sử thiết diện là tam giác đều OAB cạnh $2a$, khi đó hình nón đã cho có bán kính đáy là a và độ dài đường sinh là $2a$ (h.53). Vậy diện tích xung quanh của nó là

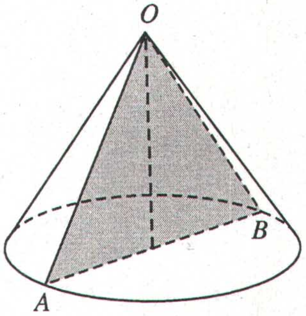
$$S_{xq} = \frac{1}{2}2\pi a.2a = 2\pi a^2.$$

Diện tích toàn phần là

$$S_{tp} = 2\pi a^2 + \pi a^2 = 3\pi a^2.$$

Thể tích là

$$V = \frac{1}{3}\pi a^2.a\sqrt{3} = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}. \qquad \blacksquare$$



Hình 53

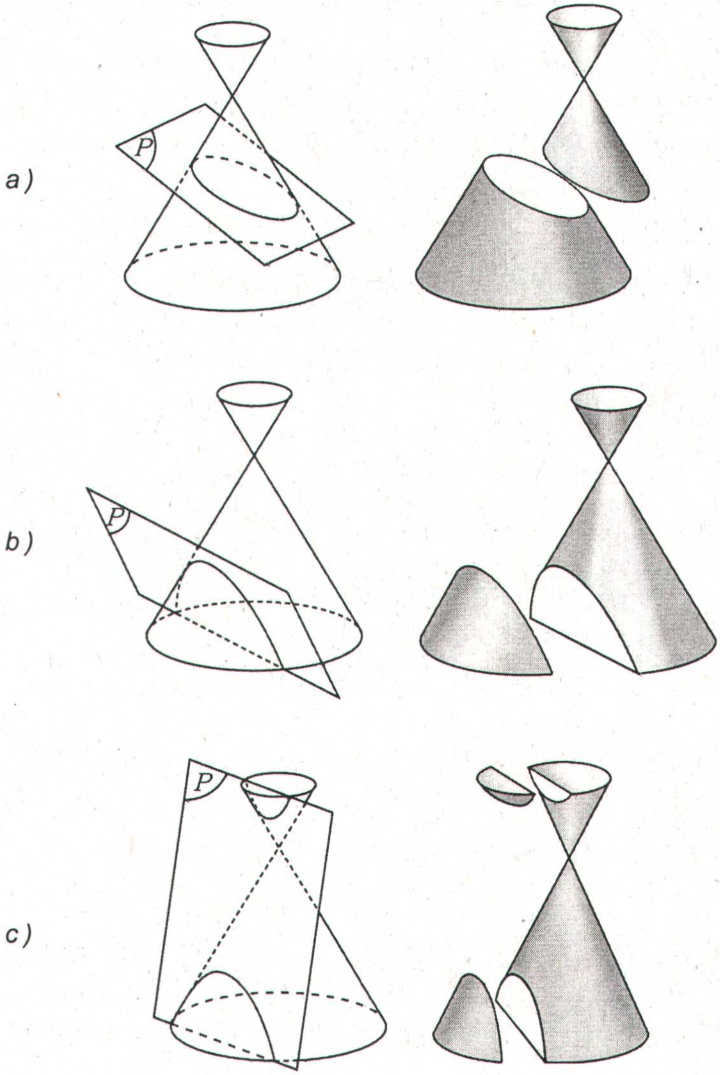
Bài đọc thêm

GIAO TUYẾN PARABOL CỦA MẶT NÓN TRÒN XOAY VÀ MẶT PHẲNG

Ở lớp 10, chúng ta đã biết ba đường cônic là elip, hypebol, parabol. Người ta chứng minh được rằng :

> *Nếu cắt mặt nón tròn xoay bởi một mặt phẳng (P) không đi qua đỉnh của mặt nón thì giao tuyến sẽ là :*
>
> *a) Một đường elip nếu mp(P) cắt mọi đường sinh (đặc biệt, nếu (P) vuông góc với trục của mặt nón thì giao là đường tròn) (h.54a) ;*
>
> *b) Một đường parabol nếu mp(P) song song với chỉ một đường sinh (h.54b) ;*

c) Một đường hypebol nếu mp(P) song song với hai đường sinh (h.54c).



Hình 54

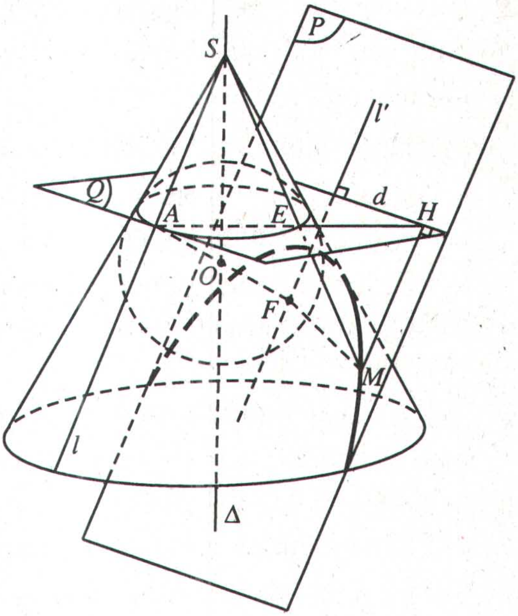
Sau đây ta giới thiệu một cách chứng minh cho trường hợp b).

Xét mặt nón tròn xoay $\mathcal{N}$ trục Δ, đỉnh *S*.

Giả sử (*P*) là mặt phẳng song song với đúng một đường sinh *l* của $\mathcal{N}$. Ta chứng minh giao của $\mathcal{N}$ và (*P*) là một parabol (h.55).

Gọi l' là giao tuyến của mp(l, Δ) và (P) thì $l' \parallel l$. Trong mặt phẳng (l,Δ), lấy điểm $O \in \Delta$ cách đều l, l' và gọi $\mathscr{S}$ là mặt cầu tâm O tiếp xúc với l và l' (theo thứ tự tại A và F). Khi đó, $\mathscr{S}$ tiếp xúc với mọi đường sinh của mặt nón $\mathfrak{N}$ và các tiếp điểm nằm trên một đường tròn $(\mathscr{C})$ chứa A.

Gọi (P') là mặt phẳng chứa l và song song với (P) thì (P') có chung với $\mathfrak{N}$ đúng một đường thẳng là l nên (P') chứa tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$ tại A. Suy ra (P') tiếp xúc với $\mathscr{S}$ tại A và (P) tiếp xúc với $\mathscr{S}$ tại F.



Hình 55

Mặt phẳng (Q) chứa $(\mathscr{C})$ cắt (P') theo tiếp tuyến vừa nói nên cắt (P) theo đường thẳng d song song với tiếp tuyến đó ; suy ra d vuông góc với l'.

Với M là một điểm tuỳ ý thuộc $\mathfrak{N} \cap (P)$, kẻ MH vuông góc với d thì MH cùng phương với l' nên song song với l. Gọi E là giao điểm của SM và $(\mathscr{C})$ thì $E \in (Q)$, ba điểm A, E, H thẳng hàng vì cùng thuộc giao tuyến của (Q) với mp(M, l). Từ $SA = SE$ suy ra $MH = ME$, mà $ME = MF$ (vì chúng là hai đoạn tiếp tuyến của $\mathscr{S}$ kẻ từ M) nên $MF = MH$. Điều này chứng tỏ rằng giao của mặt nón $\mathfrak{N}$ với mp(P) là parabol với tiêu điểm F và đường chuẩn d.

Câu hỏi và bài tập

17. Trong mỗi trường hợp sau, gọi tên hình tròn xoay :

a) Sinh bởi ba cạnh của một tam giác cân khi quay quanh trục đối xứng của tam giác đó.

b) Sinh bởi một tam giác vuông (kể cả điểm trong) khi quay quanh đường thẳng chứa một cạnh góc vuông.

18. Cho điểm A nằm ngoài mặt cầu (S). Chứng minh rằng các đường thẳng đi qua A tiếp xúc với mặt cầu (S) luôn nằm trên một mặt nón xác định.

19. Một mặt cầu gọi là ngoại tiếp hình nón nếu mặt cầu đó đi qua đỉnh của hình nón và đi qua đường tròn đáy của hình nón. Hình nón như vậy gọi là nội tiếp mặt cầu đó.

a) Chứng minh rằng mọi hình nón đều có mặt cầu ngoại tiếp duy nhất.

b) Một hình nón có chiều cao h và bán kính đáy bằng r. Tìm bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình nón đó.

c) Cho hình nón nội tiếp mặt cầu bán kính R. Nếu hình nón đó có chiều cao bằng h thì bán kính đáy của nó bằng bao nhiêu ? Tính diện tích xung quanh của hình nón đó.

20. Một mặt cầu gọi là nội tiếp hình nón nếu nó tiếp xúc với mặt đáy của hình nón và tiếp xúc với mọi đường sinh của hình nón. Khi đó hình nón được gọi là ngoại tiếp mặt cầu.

a) Chứng minh rằng mọi hình nón đều có mặt cầu nội tiếp duy nhất.

b) Một hình nón có chiều cao h và bán kính đáy bằng r. Hãy tính bán kính mặt cầu nội tiếp.

21. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = c$, $AC = b$. Tính thể tích của khối tròn xoay sinh bởi tam giác đó (kể cả các điểm trong) khi quay quanh đường thẳng BC.

ÔN TẬP CHƯƠNG II

I - Kiến thức cần nhớ

A - Mặt cầu, khối cầu

1. Mặt cầu $S(O\ ;\ R)$ là tập hợp $\{M \mid OM = R\}$. Khối cầu $S(O\ ;\ R)$ là tập hợp $\{M \mid OM \leq R\}$.

Mặt cầu là hình tròn xoay sinh bởi một đường tròn khi quay quanh một đường kính của đường tròn đó.

Khối cầu là hình tròn xoay sinh bởi một hình tròn khi quay quanh một đường kính của hình tròn đó.

2. Giao của mặt cầu $S(O\ ;\ R)$ và mp(P) phụ thuộc vào R và khoảng cách d từ O đến (P). Giả sử H là hình chiếu của O trên mp(P). Khi đó :

– Nếu $d < R$ thì giao là đường tròn nằm trên (P) có tâm H, bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2}$;

– Nếu $d = R$ thì mp(P) tiếp xúc với mặt cầu $S(O ; R)$ tại H ;

– Nếu $d > R$ thì mp(P) không cắt mặt cầu $S(O ; R)$.

3. Giao của mặt cầu $S(O ; R)$ và đường thẳng Δ phụ thuộc vào R và khoảng cách d từ O tới Δ. Giả sử H là hình chiếu của O trên Δ. Khi đó :

– Nếu $d < R$ thì đường thẳng Δ cắt mặt cầu $S(O ; R)$ tại hai điểm phân biệt ;

– Nếu $d = R$ thì Δ tiếp xúc với mặt cầu $S(O ; R)$ tại H. Các đường thẳng tiếp xúc với mặt cầu tại H nằm trên tiếp diện của mặt cầu tại H ;

– Nếu $d > R$ thì Δ không cắt mặt cầu $S(O ; R)$.

4. Về các tiếp tuyến của mặt cầu đi qua một điểm A nằm ngoài mặt cầu :

– Các đoạn thẳng nối A và các tiếp điểm bằng nhau.

– Tập hợp các tiếp điểm là một đường tròn.

5. Hình cầu bán kính R có diện tích bằng $4\pi R^2$, có thể tích bằng $\frac{4}{3}\pi R^3$.

B - Mặt trụ, hình trụ và khối trụ

1. Mặt trụ là hình tròn xoay sinh bởi đường thẳng l khi quay quanh đường thẳng Δ song song với l.

Mặt trụ có trục Δ, bán kính R là tập hợp tất cả các điểm cách đường thẳng Δ một khoảng R.

2. Hình trụ là phần mặt trụ nằm giữa hai mặt phẳng phân biệt vuông góc với trục của mặt trụ, cùng với hai hình tròn giới hạn bởi hai đường tròn là giao tuyến của mặt trụ với hai mặt phẳng nói trên.

Hình trụ là hình tròn xoay sinh bởi bốn cạnh của một hình chữ nhật khi quay quanh một đường trung bình của hình chữ nhật đó.

Diện tích xung quanh của hình trụ bằng tích số chu vi đường tròn đáy và chiều cao.

Diện tích toàn phần của hình trụ bằng tổng diện tích xung quanh và diện tích hai đáy.

3. Khối trụ là hình trụ cùng với phần bên trong của hình trụ đó.

Khối trụ là hình tròn xoay sinh bởi một hình chữ nhật (kể cả các điểm nằm trong nó) khi quay quanh một đường trung bình của hình chữ nhật đó.

Thể tích khối trụ bằng tích số của diện tích đáy và chiều cao.

C - Mặt nón, hình nón và khối nón

1. Mặt nón là hình tròn xoay sinh bởi đường thẳng l khi quay quanh đường thẳng Δ cắt l nhưng không vuông góc với l.

Mặt nón đỉnh O, trục Δ (O thuộc Δ), góc ở đỉnh 2α là hình gồm tất cả các đường thẳng đi qua O và tạo với Δ một góc bằng α ($0^{\circ} < \alpha < 90^{\circ}$).

2. Hình nón là hình tròn xoay sinh bởi ba cạnh của một tam giác cân khi quay quanh trục đối xứng của tam giác đó.

Diện tích xung quanh của hình nón bằng một nửa tích số chu vi đáy và độ dài đường sinh.

Diện tích toàn phần của hình nón bằng tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy.

3. Khối nón là hình nón cùng với phần bên trong của hình nón đó.

Khối nón là hình tròn xoay sinh bởi một hình tam giác vuông (kể cả phần trong) khi quay quanh đường thẳng chứa một cạnh góc vuông.

Thể tích khối nón bằng một phần ba tích số của diện tích đáy và chiều cao.

II - Câu hỏi tự kiểm tra

1. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng ?

a) Mặt cầu, khối cầu đều có vô số mặt phẳng đối xứng.

b) Mọi tứ diện luôn có mặt cầu ngoại tiếp.

c) Mọi hình chóp có cạnh bên bằng nhau đều có mặt cầu ngoại tiếp.

d) Mọi hình hộp đứng đều có mặt cầu ngoại tiếp.

e) Mặt nón, hình nón, khối nón đều có vô số mặt phẳng đối xứng.

g) Mặt trụ, hình trụ, khối trụ đều có duy nhất một mặt phẳng đối xứng.

2. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng ?

a) Mọi đường thẳng đều có chung với mặt trụ (hoặc mặt nón) nhiều nhất là hai điểm.

b) Mặt trụ và mặt nón có chứa các đường thẳng.

c) Mọi đường tròn lớn của mặt cầu đều đi qua hai điểm cố định.

d) Hai đường tròn phân biệt cùng nằm trên một mặt trụ có bán kính bằng nhau.

e) Hai đường tròn phân biệt cùng nằm trên một mặt nón có bán kính khác nhau.

III - Bài tập

1. Cho mp(P) và điểm A không thuộc (P). Chứng minh rằng mọi mặt cầu đi qua A và có tâm nằm trên (P) luôn luôn đi qua hai điểm cố định.

2. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$, biết $SA = SB = SC = a$, $\widehat{ASB} = 60^{\circ}$, $\widehat{BSC} = 90^{\circ}$, $\widehat{CSA} = 120^{\circ}$.

3. Cho hai đường tròn $(O\,;\,r)$ và $(O'\,;\,r')$ cắt nhau tại hai điểm A, B và lần lượt nằm trên hai mặt phẳng phân biệt (P) và (P').

   a) Chứng minh rằng có mặt cầu (S) đi qua hai đường tròn đó.

   b) Tính bán kính R của mặt cầu (S) khi $r = 5$, $r' = \sqrt{10}$, $AB = 6$, $OO' = \sqrt{21}$.

4. Cho một hình nón $\mathcal{N}$ sinh bởi một tam giác đều cạnh a khi quay quanh một đường cao của tam giác đó.

   a) Một mặt cầu có diện tích bằng diện tích toàn phần của hình nón $\mathcal{N}$ thì có bán kính bằng bao nhiêu ?

   b) Một khối cầu có thể tích bằng thể tích của khối nón $\mathcal{N}$ thì có bán kính bằng bao nhiêu ?

5. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = c$, $AC = b$. Gọi V_1, V_2, V_3 là thể tích các khối tròn xoay sinh bởi tam giác đó (kể cả các điểm trong) khi lần lượt quay quanh AB, AC, BC.

   a) Tính V_1, V_2, V_3 theo b, c.

   b) Chứng minh rằng $\dfrac{1}{V_3^2} = \dfrac{1}{V_1^2} + \dfrac{1}{V_2^2}$.

6. Một hình thang cân $ABCD$ có các cạnh đáy $AB = 2a$, $DC = 4a$, cạnh bên $AD = BC = 3a$. Cho hình thang đó (kể cả các điểm trong) quay quanh trục đối xứng của nó. Hãy tính thể tích và diện tích toàn phần của khối tròn xoay được tạo thành.

IV - Câu hỏi trắc nghiệm

1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

   (A) Mọi hình hộp đều có mặt cầu ngoại tiếp ;

   (B) Mọi hình hộp đứng đều có mặt cầu ngoại tiếp ;

(C) Mọi hình hộp có một mặt bên vuông góc với đáy đều có mặt cầu ngoại tiếp ;

(D) Mọi hình hộp chữ nhật đều có mặt cầu ngoại tiếp.

2. Trong số các hình hộp nội tiếp một mặt cầu bán kính R thì

(A) Hình hộp có đáy là hình vuông có thể tích lớn nhất.

(B) Hình lập phương có thể tích lớn nhất.

(C) Hình hộp có các kích thước tạo thành cấp số cộng công sai khác 0 có thể tích lớn nhất.

(D) Hình hộp có các kích thước tạo thành cấp số nhân công bội khác 1 có thể tích lớn nhất.

3. Một hình cầu có thể tích $\frac{4}{3}\pi$ ngoại tiếp một hình lập phương. Trong các số sau đây, số nào là thể tích của khối lập phương ?

(A) $\frac{8\sqrt{3}}{9}$;　　(B) $\frac{8}{3}$;　　(C) 1 ;　　(D) $2\sqrt{3}$.

4. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

(A) Hình chóp có đáy là tứ giác bất kì có mặt cầu ngoại tiếp.

(B) Hình chóp có đáy là hình thang vuông có mặt cầu ngoại tiếp.

(C) Hình chóp có đáy là hình bình hành có mặt cầu ngoại tiếp.

(D) Hình chóp có đáy là hình thang cân có mặt cầu ngoại tiếp.

5. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Tập hợp các điểm M trong không gian sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 2a^2$ là

(A) Mặt cầu có tâm là trọng tâm của tam giác ABC và bán kính bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$;

(B) Mặt cầu có tâm là trọng tâm của tứ diện và bán kính bằng $\frac{a\sqrt{2}}{4}$;

(C) Mặt cầu có tâm là trọng tâm của tứ diện và bán kính bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$;

(D) Đường tròn với tâm là trọng tâm tam giác ABC và bán kính bằng $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

6. Bán kính mặt cầu tiếp xúc với các cạnh của tứ diện đều $ABCD$ cạnh bằng a là

(A) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; (B) $\frac{a\sqrt{2}}{4}$; (C) $a\sqrt{2}$; (D) $2a\sqrt{2}$.

7. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

(A) Có duy nhất một mặt cầu đi qua hai đường tròn nằm trong hai mặt phẳng cắt nhau.

(B) Có duy nhất một mặt cầu đi qua hai đường tròn nằm trong hai mặt phẳng song song.

(C) Có duy nhất một mặt cầu đi qua hai đường tròn cắt nhau.

(D) Có duy nhất một mặt cầu đi qua hai đường tròn cắt nhau tại hai điểm phân biệt và không cùng nằm trong một mặt phẳng.

8. Cho hai điểm A, B cố định. Tập hợp các điểm M trong không gian sao cho diện tích tam giác MAB không đổi là

(A) Hai đường thẳng song song ;

(B) Mặt cầu ;

(C) Mặt trụ tròn xoay ;

(D) Mặt nón tròn xoay.

9. Cho hai điểm phân biệt A, B cố định. Một đường thẳng l thay đổi luôn đi qua A và cách B một khoảng $\frac{AB}{2}$. Gọi H là hình chiếu của B trên l. Tập hợp điểm H trong không gian là

(A) Mặt phẳng ; (B) Mặt trụ tròn xoay ;

(C) Mặt nón ; (D) Đường tròn.

10. Với điểm O cố định thuộc mặt phẳng (P) cho trước, xét đường thẳng l thay đổi đi qua O và tạo với (P) góc 30° Tập hợp các đường thẳng l trong không gian là

(A) Mặt phẳng ; (B) Hai đường thẳng ;

(C) Mặt trụ ; (D) Mặt nón.

11. Một hình trụ có bán kính đáy bằng a, đường cao $OO' = a\sqrt{3}$. Một đoạn thẳng AB thay đổi sao cho góc giữa AB và trục hình trụ bằng 30°, A, B thuộc hai đường tròn đáy của hình trụ. Tập hợp trung điểm I của AB là

(A) Mặt trụ ;

(B) Mặt cầu ;

(C) Đường tròn có tâm là trung điểm của đường cao hình trụ, bán kính $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ trong mặt phẳng trung trực của OO' ;

(D) Mặt phẳng.

12. Trong mặt phẳng (P) cho góc xOy. Một mặt phẳng (Q) thay đổi và vuông góc với đường phân giác trong của góc xOy, cắt Ox, Oy tại A, B. Trong (Q) lấy điểm M sao cho $\widehat{AMB} = 90^{\circ}$. Khi ấy, tập hợp điểm M là

(A) Đường tròn ;
(B) Mặt trụ ;

(C) Mặt nón ;
(D) Mặt cầu.

13. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay sinh bởi đường chéo AC' khi quay quanh trục AA' bằng

(A) $\pi a^2\sqrt{6}$;
(B) $\pi a^2\sqrt{3}$;

(C) $\pi a^2\sqrt{2}$;
(D) $\pi a^2\sqrt{5}$.

14. Cho hình nón có bán kính đáy bằng a. Một dây cung thay đổi của đường tròn đáy có độ dài không đổi bằng a. Tập hợp trung điểm của đoạn thẳng nối đỉnh hình nón với trung điểm của dây cung đó là

(A) Mặt nón cố định ;

(B) Mặt phẳng cố định ;

(C) Mặt trụ cố định ;

(D) Đường tròn cố định.

15. Cho hình trụ có bán kính đáy R, đường cao OO'. Cắt hình trụ đó bằng mặt phẳng (α) vuông góc với đáy và cách điểm O một khoảng h cho trước ($h < R$). Khi ấy, mp(α) có tính chất :

(A) Luôn tiếp xúc với một mặt trụ cố định ;

(B) Luôn cách một mặt phẳng cho trước qua trục hình trụ một khoảng h ;

(C) Cắt hình trụ theo thiết diện là hình vuông ;

(D) Cả ba tính chất trên đều sai.

16. Một khối trụ có bán kính đáy $a\sqrt{3}$, chiều cao $2a\sqrt{3}$. Thể tích của khối cầu ngoại tiếp khối trụ là

(A) $8\sqrt{6}\pi a^3$; (B) $6\sqrt{6}\pi a^3$; (C) $\frac{4}{3}\sqrt{6}\pi a^3$; (D) $4\sqrt{3}\pi a^3$.

17. Cho hình nón có đường sinh bằng đường kính đáy và bằng 2. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình nón đó là

(A) $\sqrt{3}$; (B) $2\sqrt{3}$; (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; (D) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

18. Cho hình nón sinh bởi một tam giác đều cạnh a khi quay quanh một đường cao. Một mặt cầu có diện tích bằng diện tích toàn phần của hình nón thì có bán kính là

(A) $\frac{a\sqrt{3}}{4}$; (B) $\frac{a\sqrt{2}}{4}$; (C) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; (D) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

19. Cho một hình nón sinh bởi một tam giác đều cạnh a khi quay quanh một đường cao. Một khối cầu có thể tích bằng thể tích của khối nón thì có bán kính bằng

(A) $\frac{a\sqrt[3]{2\sqrt{3}}}{4}$; (B) $\frac{a\sqrt[3]{3}}{8}$; (C) $\frac{a\sqrt[3]{2\sqrt{3}}}{8}$; (D) $\frac{a\sqrt[3]{2\sqrt{3}}}{2}$.

20. Một hình nón có đường sinh bằng a và góc ở đỉnh bằng 90°. Cắt hình nón bằng mặt phẳng (α) đi qua đỉnh sao cho góc giữa (α) và mặt đáy hình nón bằng 60°. Khi đó diện tích thiết diện là

(A) $\frac{\sqrt{2}}{3}a^2$; (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$; (C) $\frac{2}{3}a^2$; (D) $\frac{3}{2}a^2$.

21. Cho hình chóp tứ giác đều cạnh đáy bằng a, cạnh bên tạo với mặt đáy góc 60°. Diện tích toàn phần của hình nón ngoại tiếp hình chóp là

(A) $\frac{3\pi a^2}{2}$; (B) $\frac{3\pi a^2}{4}$; (C) $\frac{3\pi a^2}{6}$; (D) $\frac{3\pi a^2}{8}$.

22. Cho mặt cầu bán kính R và một hình trụ có bán kính đáy R và chiều cao $2R$. Tỉ số thể tích khối cầu và khối trụ là

(A) $\frac{2}{3}$; (B) $\frac{3}{2}$; (C) 2 ; (D) $\frac{1}{2}$.

23. Cho hình trụ có bán kính đáy R, chiều cao cũng bằng R. Một hình vuông $ABCD$ có hai cạnh AB và CD lần lượt là các dây cung của hai đường tròn đáy, mp$\left(ABCD\right)$ không vuông góc với mặt phẳng đáy hình trụ. Diện tích hình vuông đó là

(A) $\frac{5R^2}{2}$; (B) $5R^2$; (C) $\frac{5R^2\sqrt{2}}{2}$; (D) $5R^2\sqrt{2}$;

24. Một khối hộp chữ nhật nội tiếp trong một khối trụ. Ba kích thước của khối hộp chữ nhật là a, b, c . Thể tích của khối trụ là

(A) $\frac{1}{4}\pi\left(a^2+b^2\right)c$;

(B) $\frac{1}{4}\pi\left(b^2+c^2\right)a$;

(C) $\frac{1}{4}\pi\left(c^2+a^2\right)b$;

(D) $\frac{1}{4}\pi\left(a^2+b^2\right)c$ hoặc $\frac{1}{4}\pi\left(b^2+c^2\right)a$ hoặc $\frac{1}{4}\pi\left(c^2+a^2\right)b$.

25. Một khối tứ diện đều có cạnh a nội tiếp một khối nón. Thể tích khối nón là

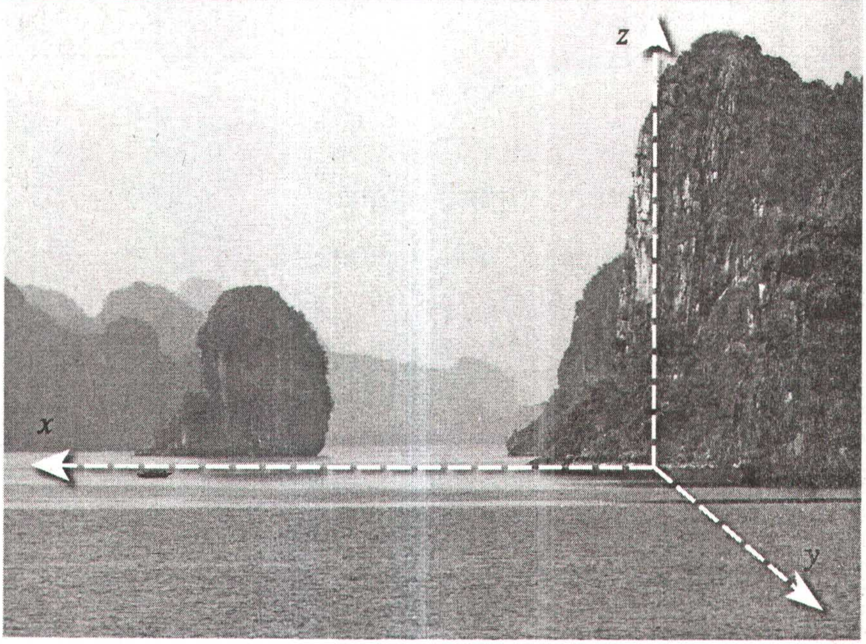
(A) $\frac{\sqrt{3}}{27}\pi a^3$; (B) $\frac{\sqrt{6}}{27}\pi a^3$; (C) $\frac{\sqrt{3}}{9}\pi a^3$; (D) $\frac{\sqrt{6}}{9}\pi a^3$.

26. Cho hình nón đỉnh S, đáy là hình tròn tâm O, góc ở đỉnh bằng 120° . Trên đường tròn đáy, lấy một điểm A cố định và điểm M di động. Gọi s là diện tích của tam giác SAM. Có bao nhiêu vị trí của M để s đạt giá trị lớn nhất ?

(A) Có 1 vị trí ; (B) Có 2 vị trí ;

(C) Có 3 vị trí ; (D) Có vô số vị trí.

CHƯƠNG III PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN



Ở lớp 10, chúng ta đã làm quen với phương pháp toạ độ trên mặt phẳng. Trong chương này, ta sẽ nói đến phương pháp toạ độ trong không gian.

Học xong chương này, học sinh cần :

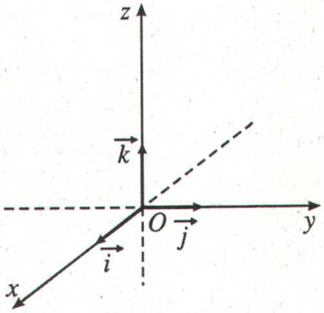
- Hiểu và nắm vững định nghĩa về toạ độ của điểm và của vectơ trong một hệ trục toạ độ.
- Nhớ và vận dụng được biểu thức toạ độ của các phép tính trên các vectơ, các công thức và cách tính các đại lượng hình học bằng toạ độ.
- Nhận dạng các phương trình đường thẳng, mặt phẳng, mặt cầu trong một hệ toạ độ cho trước và viết được phương trình của chúng khi biết một số điều kiện cho trước.

§1 HỆ TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

1. Hệ trục toạ độ trong không gian

Trong hình học phẳng, ta đã biết hệ trục toạ độ trên mặt phẳng. Hệ đó thường được kí hiệu là Oxy hoặc $(O\,;\,\vec{i},\vec{j})$. Bây giờ ta thiết lập hệ trục toạ độ trong không gian.

Trong không gian, xét ba trục toạ độ Ox, Oy, Oz có chung điểm gốc O và đôi một vuông góc với nhau (h.56).



Hình 56

ĐỊNH NGHĨA 1

> *Hệ gồm ba trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc được gọi là* ***hệ trục toạ độ vuông góc*** *trong không gian.*

Thuật ngữ và kí hiệu

Hệ trục toạ độ trong định nghĩa trên còn được gọi đơn giản là *hệ toạ độ trong không gian,* và kí hiệu là $Oxyz$. Ta thường gọi các vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz lần lượt là $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ và còn kí hiệu hệ trục toạ độ là $\left(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Điểm O gọi là *gốc* của hệ toạ độ, hoặc đơn giản là *gốc toạ độ*, Ox gọi là *trục hoành*, Oy gọi là *trục tung*, Oz gọi là *trục cao.*

Các mặt phẳng đi qua hai trong ba trục toạ độ gọi là các *mặt phẳng toạ độ*, ta kí hiệu chúng là mp(Oxy), mp(Oyz) và mp(Oxz), hoặc đơn giản hơn là (Oxy), (Oyz), (Oxz).

Khi không gian đã có hệ toạ độ $Oxyz$ thì nó được gọi là *không gian toạ độ Oxyz* hoặc đơn giản là *không gian Oxyz.*

Ta cần chú ý tới các đẳng thức sau đây :

$$\boxed{\begin{array}{l}\vec{i}^{\,2}=\vec{j}^{\,2}=\vec{k}^{\,2}=1\\ \vec{i}.\vec{j}=\vec{j}.\vec{k}=\vec{k}.\vec{i}=0.\end{array}}$$

?1 *Tại sao ta có các đẳng thức trên ?*

2. Toạ độ của vectơ

Trong không gian toạ độ *Oxyz* với các vectơ đơn vị $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ trên các trục, cho một vectơ $\vec{u}$. Khi đó ta đã biết rằng có bộ ba số duy nhất $(x\,;\,y\,;\,z)$ sao cho $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Bộ ba số đó cũng được gọi là *toạ độ của vectơ* $\vec{u}$ đối với hệ toạ độ *Oxyz* và kí hiệu $\vec{u} = (x\,;\,y\,;\,z)$ hoặc $\vec{u}\,(x\,;\,y\,;\,z)$. Vậy :

$$\boxed{\vec{u}=\left(x;y;z\right) \Leftrightarrow \vec{u}\,(x\,;\,y\,;\,z) \Leftrightarrow \vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\,.}$$

Hiển nhiên theo định nghĩa và kí hiệu trên, ta có

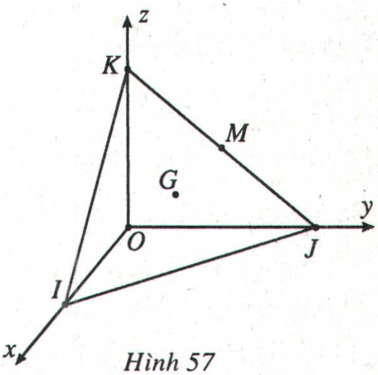
$$\vec{i} = (1;\,0;\,0)\ ;\ \vec{j} = (0;\,1;\,0)\ ;\ \vec{k} = (0;\,0;\,1)\,.$$

?2 *Tại sao nếu vectơ* $\vec{u}$ *có toạ độ* $(x\,;\,y\,;\,z)$ *đối với hệ toạ độ* $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ *thì* $x = \vec{u}.\vec{i}\ ;\ y = \vec{u}.\vec{j}\ ;\ z = \vec{u}.\vec{k}$?

Ví dụ 1. *Trong không gian toạ độ* $\left(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, *gọi I, J, K là các điểm sao cho* $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$, $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$. *Gọi M là trung điểm của JK, G là trọng tâm tam giác IJK.*

a) Xác định toạ độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$.

b) Xác định toạ độ của vectơ $\overrightarrow{MG}$.



Hình 57

Giải (h.57)

a) Ta có

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{OK}\right) = 0\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k},$$

do đó $\overrightarrow{OM} = \left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

b) Ta có

$$\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{OK}\right) - \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{OK}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{3} - 0\right)\vec{i} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)\vec{j} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)\vec{k},$$

hay $\overrightarrow{MG} = \left(\frac{1}{3};-\frac{1}{6};-\frac{1}{6}\right)$. ■

Từ định nghĩa về toạ độ của vectơ, ta dễ dàng suy ra các tính chất sau đây :

Cho các vectơ $\overrightarrow{u_1} = (x_1\,;\,y_1\,;\,z_1)$, $\overrightarrow{u_2} = (x_2\,;\,y_2\,;\,z_2)$ *và số k tuỳ ý, ta có :*

1) $\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{u_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2,\ y_1 = y_2,\ z_1 = z_2$

2) $\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} = \left(x_1 + x_2\,;\,y_1 + y_2\,;\,z_1 + z_2\right)$

3) $\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2} = \left(x_1 - x_2\,;\,y_1 - y_2\,;\,z_1 - z_2\right)$

4) $k\overrightarrow{u_1} = (kx_1\,;\,ky_1\,;\,kz_1)$

5) $\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

6) $\left|\overrightarrow{u_1}\right| = \sqrt{\overrightarrow{u_1}^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$

7) $\cos\left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right) = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\,.\,\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$

với $\overrightarrow{u_1} \neq \vec{0}$, $\overrightarrow{u_2} \neq \vec{0}$

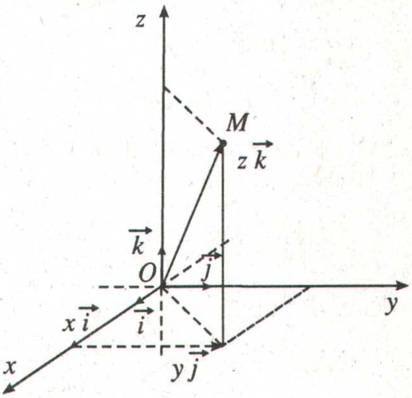
8) $\overrightarrow{u_1} \perp \overrightarrow{u_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$.

3. Toạ độ của điểm

Trong không gian toạ độ $Oxyz$, mỗi điểm M được hoàn toàn xác định bởi vectơ $\overrightarrow{OM}$ (h.58). Bởi vậy, nếu $(x\,;\,y\,;\,z)$ là toạ độ của $\overrightarrow{OM}$ thì ta cũng nói $(x\,;\,y\,;\,z)$ là *toạ độ của điểm M* và kí hiệu là $M = (x\,;\,y\,;\,z)$ hoặc $M(x\,;\,y\,;\,z)$.

Như vậy :

$$\boxed{M = (x\,;\,y\,;\,z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\,.}$$



Hình 58

Nếu điểm M có toạ độ $(x\,;\,y\,;\,z)$ thì số x gọi là *hoành độ*, số y gọi là *tung độ* và số z gọi là *cao độ* của điểm M.

?3 *Cho hệ toạ độ Oxyz và điểm* $M(x\,;\,y\,;\,z)$*. Tại sao có các khẳng định sau ?*

a) $O = (0\,;\,0\,;\,0)$.

b) $M \in (Oxy) \Leftrightarrow z = 0$, *tức là* $M = (x\,;\,y\,;\,0)$.

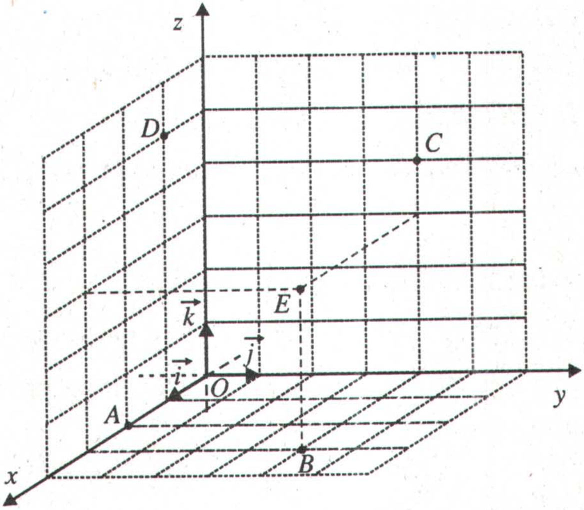
$M \in (Oyz) \Leftrightarrow x = 0$, *tức là* $M = (0\,;\,y\,;\,z)$.

$M \in (Oxz) \Leftrightarrow y = 0$, *tức là* $M = (x\,;\,0\,;\,z)$.

?4 *Với điều kiện nào của x, y, z thì điểm* $M(x\,;\,y\,;\,z)$ *nằm trên một trục toạ độ ?*

1

Trên hình 59 có một hệ trục toạ độ *Oxyz* cùng với các hình vuông có cạnh bằng đơn vị.



Hình 59

a) Xác định toạ độ của các điểm A, B, C, D, E.

b) Dựng điểm P nếu $P = (3\,;\,6\,;\,-3)$.

4. Liên hệ giữa toạ độ vectơ và toạ độ hai điểm mút

Cho hai điểm $A(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ và $B(x_B\,;\,y_B\,;\,z_B)$. Theo định nghĩa, ta có $\overrightarrow{OA} = (x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ và $\overrightarrow{OB} = (x_B\,;\,y_B\,;\,z_B)$. Ta lại biết rằng $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. Từ đó ta suy ra toạ độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ và độ dài của nó :

1) $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A\,;\,y_B - y_A\,;\,z_B - z_A)$.

2) $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

2

Trong không gian toạ độ $Oxyz$ cho bốn điểm không đồng phẳng $A(x_A ; y_A ; z_A)$, $B(x_B ; y_B ; z_B)$, $C(x_C ; y_C ; z_C)$, $D(x_D ; y_D ; z_D)$.

a) Tìm toạ độ của trung điểm đoạn thẳng AB.

b) Tìm toạ độ của trọng tâm tam giác ABC.

c) Tìm toạ độ của trọng tâm tứ diện $ABCD$.

Ví dụ 2. *Trong không gian toạ độ Oxyz, cho bốn điểm* $A(5 ; 3 ; -1)$, $B(2 ; 3 ; -4)$, $C(1 ; 2 ; 0)$, $D(3 ; 1 ; -2)$.

1. *Chứng minh rằng :*

a) Bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng ;

b) Tứ diện ABCD có các cạnh đối vuông góc với nhau ;

c) Hình chóp D.ABC là hình chóp đều.

2. *Tìm toạ độ chân đường cao H của hình chóp D.ABC.*

Giải

1. a) Ta phải chứng minh ba vectơ $\overrightarrow{DA} = (2 ; 2 ; 1)$, $\overrightarrow{DB} = (-1 ; 2 ; -2)$ và $\overrightarrow{DC} = (-2 ; 1 ; 2)$ không đồng phẳng. Rõ ràng hai vectơ $\overrightarrow{DB}$ và $\overrightarrow{DC}$ không cùng phương nên nếu ba vectơ $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$ đồng phẳng thì phải có các số m và n sao cho

$$m\overrightarrow{DB} + n\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} \text{ hay } \begin{cases} -m - 2n = 2 \\ 2m + n = 2 \\ -2m + 2n = 1. \end{cases}$$

Dễ thấy hệ phương trình trên vô nghiệm, suy ra ba vectơ ấy không đồng phẳng.

b) Ta có $\overrightarrow{DA} = (2 ; 2 ; 1)$ và $\overrightarrow{BC} = (-1 ; -1 ; 4)$.

Vậy $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BC} = -2 - 2 + 4 = 0$. Suy ra $DA \perp BC$.

Làm tương tự ta cũng có $DB \perp AC$ và $DC \perp AB$.

c) $DA = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3$;

$DB = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3$;

$DC = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} = 3$.

Tương tự, ta cũng có $AB = BC = CA = 3\sqrt{2}$. Vậy $D.ABC$ là hình chóp đều.

2. Vì $D.ABC$ là hình chóp đều nên H trùng với trọng tâm tam giác ABC hay $\overrightarrow{OH} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$. Từ đó suy ra

$$H = \left(\frac{8}{3}; \frac{8}{3}; -\frac{5}{3}\right). \qquad \blacksquare$$

5. Tích có hướng của hai vectơ

Ta đã biết về tích vô hướng của hai vectơ. Ta cần nhớ rằng tích đó là một số và có thể tính được dễ dàng nếu biết toạ độ của hai vectơ.

Sau đây ta sẽ nói về *tích có hướng* của hai vectơ.

Khác với tích vô hướng, tích có hướng không phải là một số mà là một vectơ, bởi vậy tích có hướng còn được gọi là *tích vectơ*.

ĐỊNH NGHĨA 2

> ***Tích có hướng*** *(hay tích vectơ) của hai vectơ* $\vec{u}(a; b; c)$ *và* $\vec{v}(a'; b'; c')$ *là một vectơ được kí hiệu là* $[\vec{u}, \vec{v}]$ *(hoặc* $\vec{u} \wedge \vec{v}$*) và có toạ độ được xác định như sau :*
>
> $$[\vec{u}, \vec{v}] = \left(\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}\right) = (bc' - b'c; ca' - c'a; ab' - a'b).$$

Ví dụ 3. *Cho* $\vec{u} = (1 ; 0 ; -1)$ *và* $\vec{v} = (2 ; 1 ; 1)$ *thì ta có :*

$$[\vec{u}, \vec{v}] = \left(\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right) = (1; -3; 1).$$

3

Đối với hệ toạ độ $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, hãy chứng tỏ các công thức sau đây đúng :

$$\boxed{[\vec{i}, \vec{j}] = \vec{k}; [\vec{j}, \vec{k}] = \vec{i}; [\vec{k}, \vec{i}] = \vec{j}.}$$

Tính chất của tích có hướng

Các tính chất sau đây của tích có hướng thường được áp dụng khi giải một số bài toán hình học :

1. $[\vec{u}, \vec{v}] = \vec{0}$ *khi và chỉ khi hai vectơ* $\vec{u}$ *và* $\vec{v}$ *cùng phương.*
2. *Vectơ* $[\vec{u}, \vec{v}]$ *vuông góc với cả hai vectơ* $\vec{u}$ *và* $\vec{v}$ *, tức là*
$$[\vec{u}, \vec{v}].\vec{u} = [\vec{u}, \vec{v}].\vec{v} = 0.$$
3. $\left|[\vec{u}, \vec{v}]\right| = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\sin(\vec{u}, \vec{v}).$

Chứng minh

1. Từ định nghĩa 2, ta dễ dàng chứng minh được tính chất 1.

2. Giả sử $\vec{u} = (a\,;b\,;c)$ và $\vec{v} = (a'\,;b'\,;c')$. Từ định nghĩa của tích có hướng ta có :

$$[\vec{u}, \vec{v}] = \left(bc' - b'c\,;\,ca' - c'a\,;\,ab' - a'b\right).$$

Suy ra :

$$[\vec{u}, \vec{v}].\vec{u} = (bc' - b'c)a + (ca' - c'a)b + (ab' - a'b)c$$
$$= bc'a - b'ca + ca'b - c'ab + ab'c - a'bc = 0.$$

Tương tự ta cũng có $[\vec{u}, \vec{v}].\vec{v} = 0$.

3. Nếu một trong hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là vectơ $\vec{0}$ thì tính chất 3 là hiển nhiên.

Bây giờ ta xét trường hợp cả hai vectơ đó đều khác $\vec{0}$. Khi đó, vì $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$ nên ta có :

$$|\vec{u}|.|\vec{v}|\sin(\vec{u}, \vec{v}) = |\vec{u}|.|\vec{v}|\sqrt{1 - \cos^2(\vec{u}, \vec{v})}$$

$$= |\vec{u}|.|\vec{v}|\sqrt{1 - \frac{(\vec{u}.\vec{v})^2}{|\vec{u}|^2.|\vec{v}|^2}} = \sqrt{\vec{u}^2.\vec{v}^2 - (\vec{u}.\vec{v})^2}$$

$$= \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2) - (aa' + bb' + cc')^2}$$

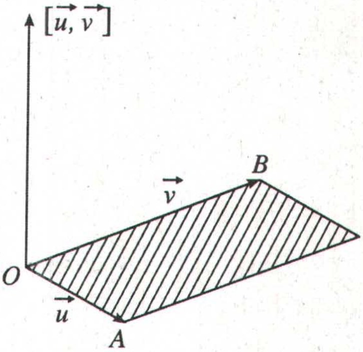
$$= \sqrt{(bc' - b'c)^2 + (ca' - c'a)^2 + (ab' - a'b)^2} = \left|[\vec{u}, \vec{v}]\right|.$$ ■

CHÚ Ý

Ta vẽ các vectơ $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$; $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$. Nếu hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ không cùng phương (h.60), ta gọi S là diện tích hình bình hành có hai cạnh là OA và OB, khi đó

$$|\vec{u}|.|\vec{v}|.\sin(\vec{u}, \vec{v}) = OA.OB.\sin\widehat{AOB}$$
$$= S.$$

Vậy độ dài của vectơ $[\vec{u}, \vec{v}]$ bằng số đo diện tích hình bình hành nói trên.



Hình 60

Ứng dụng của tích có hướng

a) Tính diện tích hình bình hành

Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì theo chú ý trên ta có

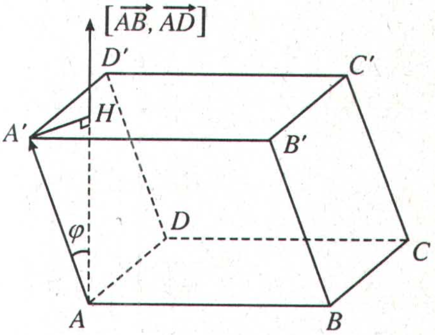
$$S = \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right]\right|.$$

b) Tính thể tích khối hộp

Nếu $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp với diện tích đáy $ABCD$ là S, chiều cao là $h = AH$, φ là góc hợp bởi hai vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right]$ (h.61) thì thể tích của hình hộp đó là :

$$V = S.h$$
$$= \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right]\right|.AH$$
$$= \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right]\right| . \left|\overrightarrow{AA'}\right| . |\cos\varphi|.$$

Vậy $V = \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right] . \overrightarrow{AA'}\right|$.



Hình 61

4

Hãy chứng tỏ rằng ba vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ đồng phẳng khi và chỉ khi $[\vec{u}, \vec{v}].\vec{w} = 0$.

Như vậy, chúng ta nên nhớ một số tính chất liên quan đến tích vô hướng và tích có hướng sau đây :

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0.$$

$$\vec{u} \text{ và } \vec{v} \text{ cùng phương} \Leftrightarrow \left[\vec{u}, \vec{v}\right] = \vec{0}.$$

$$\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w} \text{ đồng phẳng} \Leftrightarrow \left[\vec{u}, \vec{v}\right].\vec{w} = 0.$$

Ví dụ 4. *Trong không gian toạ độ Oxyz, cho bốn điểm* $A(0 ; 1 ; 1)$, $B(-1 ; 0 ; 2)$, $C(-1 ; 1 ; 0)$ và $D(2 ; 1 ; -2)$.

a) Chứng minh rằng bốn điểm đó không đồng phẳng.

b) Tính độ dài đường cao của tam giác ABC kẻ từ đỉnh A và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đó.

c) Tính góc CBD và góc giữa hai đường thẳng AB và CD.

d) Tính thể tích tứ diện ABCD và độ dài đường cao của tứ diện kẻ từ đỉnh D.

Giải

a) Bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng khi và chỉ khi ba vectơ $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$ không đồng phẳng hay

$$\left[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right].\overrightarrow{BD} \neq 0.$$

Ta có $\overrightarrow{BA} = (1 ; 1 ; -1)$, $\overrightarrow{BC} = (0 ; 1 ; -2)$, $\overrightarrow{BD} = (3 ; 1 ; -4)$. Suy ra :

$$\left[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right] = \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right) = (-1 ; 2 ; 1).$$

$$\left[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right].\overrightarrow{BD} = (-1).3 + 2.1 + 1.(-4) = -5 \neq 0.$$

Vậy bốn điểm đã cho không đồng phẳng.

b) Ta có :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Nếu gọi AH là đường cao của tam giác ABC thì

$$AH = \frac{2S_{ABC}}{BC} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{0^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}.$$

Nếu gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC và $2p$ là chu vi của tam giác đó thì $S_{ABC} = p.r$. Dễ dàng tính được

$$2p = AB + BC + CA = \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{2}$$

nên ta có : $$r = \frac{S_{ABC}}{p} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{2}}.$$

c) $\cos\widehat{CBD} = \cos\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right) = \dfrac{\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD}}{\left|\overrightarrow{BC}\right|.\left|\overrightarrow{BD}\right|} = \dfrac{9}{\sqrt{130}}.$

Nếu gọi α là góc giữa hai đường thẳng AB và CD thì

$$\cos\alpha = \left|\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)\right| = \frac{\left|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{CD}\right|} = \frac{5}{\sqrt{39}}.$$

d) Ta dễ thấy thể tích khối tứ diện $ABCD$ bằng $\dfrac{1}{6}$ thể tích khối hộp có ba cạnh là BA, BC, BD. Như vậy :

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right].\overrightarrow{BD}\right| = \frac{5}{6}.$$

Nếu gọi DK là đường cao của tứ diện kẻ từ D thì

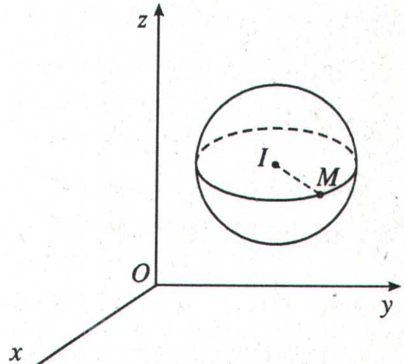
$$DK = \frac{3V_{ABCD}}{S_{ABC}} = \frac{3.\frac{5}{6}}{\frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{5}{\sqrt{6}}. \qquad \blacksquare$$

6. Phương trình mặt cầu

Trong không gian toạ độ $Oxyz$ cho mặt cầu $S(I\,;R)$ có tâm $I(x_0\,;y_0\,;z_0)$ và bán kính R (h.62).

Điểm $M(x\,;y\,;z)$ thuộc mặt cầu đó khi và chỉ khi $IM = R$ hay $IM^2 = R^2$, nghĩa là

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$



Hình 62

Phương trình trên được gọi là *phương trình của mặt cầu* $S(I\,;R)$.

Như vậy, nếu biết toạ độ của tâm và biết bán kính mặt cầu thì ta có thể dễ dàng viết được phương trình của mặt cầu đó.

Mặt cầu tâm $I(x_0\,;y_0\,;z_0)$, *bán kính* R *có phương trình*

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2.$$

5

Hãy viết phương trình mặt cầu có đường kính A_1A_2 với

$$A_1=(a_1\,;b_1\,;c_1) \text{ và } A_2=(a_2\,;b_2\,;c_2)$$

theo hai cách sau :

– Tìm toạ độ tâm và tính bán kính của mặt cầu.

– Nhận xét rằng điểm M nằm trên mặt cầu khi và chỉ khi $\overrightarrow{A_1M}.\overrightarrow{A_2M}=0$.

6

Viết phương trình mặt cầu đi qua bốn điểm $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(0;1;0)$, $D(0;0;1)$.

Nhận xét

Nếu ta khai triển phương trình mặt cầu $S(I\,;R)$ và viết dưới dạng $f(x,y,z)=0$ thì dễ thấy rằng $f(x,y,z)$ là đa thức bậc hai đối với x, y, z, có các hệ số của x^2, y^2, z^2 đều bằng 1 và không có các hạng tử chứa xy, yz, zx. Bây giờ ta xét vấn đề ngược lại : *Phương trình dạng*

$$x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0 \qquad (1)$$

có phải là phương trình mặt cầu trong không gian toạ độ Oxyz cho trước hay không ?

Phương trình (1) có thể viết như sau :

$$(x+a)^2+(y+b)^2+(z+c)^2=a^2+b^2+c^2-d. \qquad (2)$$

Gọi I là điểm có toạ độ $(-a\,;-b\,;-c)$ và M là điểm có toạ độ $(x\,;y\,;z)$ thì vế trái của (2) chính là IM^2. Bởi vậy ta dễ dàng suy ra :

Nếu $a^2+b^2+c^2-d>0$ thì $IM=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$. Vậy (1) là phương trình của mặt cầu có tâm $I(-a\,;-b\,;-c)$ và có bán kính

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}\,.$$

Nếu $a^2 + b^2 + c^2 - d = 0$ thì $IM = 0$ và phương trình (1) xác định điểm I duy nhất.

Nếu $a^2 + b^2 + c^2 - d < 0$ thì không có điểm M nào có toạ độ thoả mãn (1). Vậy :

> *Phương trình* $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$ *là phương trình của mặt cầu khi và chỉ khi* $a^2 + b^2 + c^2 > d$. *Khi đó tâm mặt cầu là điểm* $I(-a\,;\,-b\,;\,-c)$ *và bán kính mặt cầu là*
>
> $$R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}\,.$$

7

Mỗi phương trình sau đây có phải là phương trình mặt cầu hay không ? Nếu phải thì hãy xác định tâm và tính bán kính mặt cầu đó.

a) $x^2 + y^2 - z^2 + 2x - y + 1 = 0$;

b) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2x = 0$;

c) $2x^2 + 2y^2 = (x + y)^2 - z^2 + 2x - 1$;

d) $(x + y)^2 = 2xy - z^2 + 1$.

Câu hỏi và bài tập

1. Trong hệ toạ độ $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ cho các vectơ :

$$\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j}\ ;\ \vec{v} = 3\vec{i} + 5\left(\vec{j} - \vec{k}\right)\ ;\ \vec{w} = 2\vec{i} - \vec{k} + 3\vec{j}\,.$$

a) Tìm toạ độ của các vectơ đó.

b) Tìm côsin của các góc $\left(\vec{v}, \vec{i}\right)$, $\left(\vec{v}, \vec{j}\right)$ và $\left(\vec{v}, \vec{k}\right)$.

c) Tính các tích vô hướng $\vec{u}.\vec{v}$, $\vec{u}.\vec{w}$, $\vec{v}.\vec{w}$.

2. Trong hệ toạ độ $\left(O\,; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ cho vectơ $\vec{u}$ tuỳ ý khác $\vec{0}$. Chứng minh rằng :

$$\cos^2\left(\vec{u}, \vec{i}\right) + \cos^2\left(\vec{u}, \vec{j}\right) + \cos^2\left(\vec{u}, \vec{k}\right) = 1\,.$$

3. Tìm góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ trong mỗi trường hợp sau :

a) $\vec{u} = (1 ; 1 ; 1)$; $\vec{v} = (2 ; 1 ; -1)$.

b) $\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$; $\vec{v} = -2\vec{j} + 3\vec{k}$.

4. Biết $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 5$, góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ bằng $\frac{2\pi}{3}$. Tìm k để vectơ $\vec{p} = k\vec{u} + 17\vec{v}$ vuông góc với vectơ $\vec{q} = 3\vec{u} - \vec{v}$.

5. Trong không gian toạ độ $Oxyz$, cho điểm $M(a ; b ; c)$.

a) Tìm toạ độ hình chiếu (vuông góc) của M trên các mặt phẳng toạ độ và các trục toạ độ.

b) Tìm khoảng cách từ điểm M đến các mặt phẳng toạ độ, đến các trục toạ độ.

c) Tìm toạ độ của các điểm đối xứng với M qua các mặt phẳng toạ độ.

6. Cho hai điểm $A(x_1 ; y_1 ; z_1)$ và $B(x_2 ; y_2 ; z_2)$. Tìm toạ độ điểm M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số k (tức là $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$), trong đó $k \neq 1$.

7. Cho hình bình hành $ABCD$ với $A(-3 ; -2 ; 0)$, $B(3 ; -3 ; 1)$, $C(5 ; 0 ; 2)$. Tìm toạ độ đỉnh D và góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$.

8. a) Tìm toạ độ điểm M thuộc Ox sao cho M cách đều hai điểm $A(1 ; 2 ; 3)$ và $B(-3 ; -3 ; 2)$.

b) Cho ba điểm $A(2 ; 0 ; 4)$, $B(4 ; \sqrt{3} ; 5)$ và $C(\sin 5t ; \cos 3t ; \sin 3t)$. Tìm t để AB vuông góc với OC (O là gốc toạ độ).

9. Xét sự đồng phẳng của ba vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ và $\vec{w}$ trong mỗi trường hợp sau :

a) $\vec{u}(4 ; 3 ; 4)$, $\vec{v}(2 ; -1 ; 2)$, $\vec{w}(1 ; 2 ; 1)$;

b) $\vec{u}(1 ; -1 ; 1)$, $\vec{v}(0 ; 1 ; 2)$, $\vec{w}(4 ; 2 ; 3)$;

c) $\vec{u}(4 ; 2 ; 5)$, $\vec{v}(3 ; 1 ; 3)$, $\vec{w}(2 ; 0 ; 1)$.

10. Cho ba điểm $A(1 ; 0 ; 0)$, $B(0 ; 0 ; 1)$, $C(2 ; 1 ; 1)$.

a) Chứng minh A, B, C không thẳng hàng.

b) Tính chu vi và diện tích tam giác ABC.

c) Tính độ dài đường cao của tam giác ABC kẻ từ đỉnh A.

d) Tính các góc của tam giác ABC.

11. Cho bốn điểm $A(1 ; 0 ; 0)$, $B(0 ; 1 ; 0)$, $C(0 ; 0 ; 1)$ và $D(-2 ; 1 ; -2)$.

a) Chứng minh rằng A, B, C, D là bốn đỉnh của một hình tứ diện.

b) Tính góc tạo bởi các cạnh đối của tứ diện đó. Tính thể tích tứ diện $ABCD$ và độ dài đường cao của tứ diện kẻ từ đỉnh A.

12. Cho hình chóp $S.ABC$ có đường cao $SA = h$, đáy là tam giác ABC vuông tại C, $AC = b$, $BC = a$. Gọi M là trung điểm của AC và N là điểm sao cho $\overrightarrow{SN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SB}$.

a) Tính độ dài MN.

b) Tìm sự liên hệ giữa a, b, h để MN vuông góc với SB.

13. Tìm toạ độ tâm và tính bán kính của mỗi mặt cầu sau đây :

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y + 1 = 0$;

b) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6x - 3y + 15z - 2 = 0$;

c) $9x^2 + 9y^2 + 9z^2 - 6x + 18y + 1 = 0$.

14. Trong mỗi trường hợp sau, hãy viết phương trình mặt cầu :

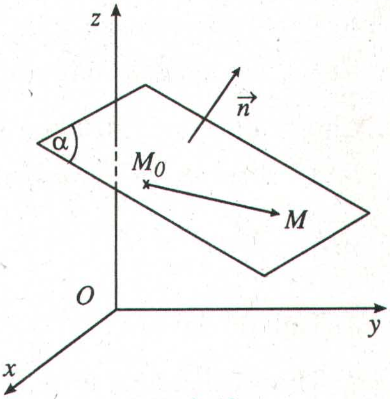
a) Đi qua ba điểm $A(0 ; 8 ; 0)$, $B(4 ; 6 ; 2)$, $C(0 ; 12 ; 4)$ và có tâm nằm trên mp(Oyz) ;

b) Có bán kính bằng 2, tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) và có tâm nằm trên tia Ox ;

c) Có tâm $I(1 ; 2 ; 3)$ và tiếp xúc với mp(Oyz).

§2 PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

1. Phương trình mặt phẳng



Hình 63

Vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ gọi là *vectơ pháp tuyến* của mặt phẳng (α) nếu giá của $\vec{n}$ vuông góc với mặt phẳng (α).

Rõ ràng nếu $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của mp(α) thì $k\vec{n}$ $(k \neq 0)$ cũng là vectơ pháp tuyến của mp(α).

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(x_0 ; y_0 ; z_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(A ; B ; C)$. Chú ý rằng vì $\vec{n} \neq \vec{0}$ nên $A^2 + B^2 + C^2 > 0$. Khi đó, điều kiện cần và đủ để điểm $M(x ; y ; z)$ thuộc (α) là $\vec{n}.\overrightarrow{M_0M} = 0$ (h.63), hay

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.} \qquad (1)$$

Nhận xét. Nếu ta đặt $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$ thì phương trình (1) trở thành :

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0, \text{ trong đó } A^2 + B^2 + C^2 > 0.} \qquad (2)$$

Phương trình (2) gọi là *phương trình tổng quát của mặt phẳng* (α) hay nói gọn là *phương trình mp*(α).

Như vậy, ta dễ dàng viết được phương trình mặt phẳng nếu biết toạ độ của một điểm thuộc nó và toạ độ một vectơ pháp tuyến của nó.

Ví dụ 1. *Viết phương trình mặt phẳng* (α) *đi qua ba điểm* $M(0 ; 1 ; 1)$, $N(1 ; -2 ; 0)$ *và* $P(1 ; 0 ; 2)$.

Giải. Ta có $\overrightarrow{MN} = (1 ; -3 ; -1)$ và $\overrightarrow{MP} = (1 ; -1 ; 1)$. Từ đó ta tính được $\vec{n} = \left[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}\right] = (-4 ; -2 ; 2)$. Vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ vuông góc với cả hai vectơ

$\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MP}$ nên $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α). Như vậy, (α) là mặt phẳng đi qua điểm M và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ nên có phương trình

$$-4(x-0)-2(y-1)+2(z-1)=0 \text{ hay } 2x+y-z=0. \qquad ■$$

1

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1\,;-2\,;3)$ và $B(-5\,;0\,;1)$. Hãy viết phương trình mặt phẳng trung trực (P) của đoạn thẳng AB.

Như vậy, mỗi mặt phẳng đều có phương trình dạng (2). Định lí sau đây khẳng định điều ngược lại.

ĐỊNH LÍ

Trong không gian Oxyz, mỗi phương trình

$$Ax+By+Cz+D=0 \text{ với } A^2+B^2+C^2>0$$

đều là phương trình của một mặt phẳng xác định.

2 (để chứng minh định lí).

Lấy một nghiệm $(x_0\,;y_0\,;z_0)$ nào đó của phương trình (2), tức là

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0.$$

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm $M_0(x_0\,;y_0\,;z_0)$ và có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}(A;B;C)$. Hãy viết phương trình của (P) để thấy rằng nó tương đương với phương trình (2).

2. Các trường hợp riêng

Chúng ta hãy xét một số trường hợp riêng của phương trình mặt phẳng và nói rõ trong mỗi trường hợp đó, mặt phẳng có đặc điểm gì.

3

Trong không gian $Oxyz$, xét mặt phẳng (α) có phương trình :

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Hãy giải thích vì sao ta có các khẳng định sau đây :

a) Mặt phẳng (α) đi qua gốc toạ độ O khi và chỉ khi $D=0$.

b) Mặt phẳng (α) song song (hoặc chứa) trục toạ độ Ox khi và chỉ khi $A=0$.

Hãy phát biểu kết luận tương tự cho trường hợp $B=0$ và trường hợp $C=0$.

c) Mặt phẳng (α) song song hoặc trùng với mặt phẳng (Oxy) khi và chỉ khi $A = B = 0$.

Hãy phát biểu kết luận tương tự cho trường hợp $B = C = 0$ và trường hợp $C = A = 0$.

Sau đây ta xét trường hợp mặt phẳng có phương trình

$$Ax + By + Cz + D = 0 \textit{ với các hệ số } A, B, C, D \textit{ đều khác } 0.$$

Khi đó bằng cách đặt $a = -\dfrac{D}{A}$, $b = -\dfrac{D}{B}$, $c = -\dfrac{D}{C}$, ta đưa phương trình trên về dạng

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.} \qquad (3)$$

Rõ ràng mặt phẳng có phương trình (3) cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm $M(a\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $N(0\ ;\ b\ ;\ 0)$ và $P(0\ ;\ 0\ ;\ c)$. Độ dài đại số của các vectơ $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OP}$ trên các trục toạ độ chứa chúng lần lượt là $\overline{OM} = a$; $\overline{ON} = b$; $\overline{OP} = c$. Bởi vậy phương trình (3) được gọi là *phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn.*

Ví dụ 2. *Trong không gian Oxyz, cho điểm* $M = (30\ ;\ 15\ ;\ 6)$.

a) Hãy viết phương trình mặt phẳng (α) *đi qua các hình chiếu của M trên các trục toạ độ.*

b) Tìm toạ độ hình chiếu H của điểm O trên mp(α).

Giải

a) Các hình chiếu của M trên các trục toạ độ là các điểm $(30\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $(0\ ;\ 15\ ;\ 0)$ và $(0\ ;\ 0\ ;\ 6)$. Phương trình mp(α) đi qua ba điểm đó là

$$\frac{x}{30} + \frac{y}{15} + \frac{z}{6} = 1 \text{ hay } x + 2y + 5z - 30 = 0.$$

b) Điểm H nằm trên mặt phẳng (α) và vectơ $\overrightarrow{OH}$ cùng phương với vectơ pháp tuyến $\vec{n}(1\ ;\ 2\ ;\ 5)$ của (α), tức là $\overrightarrow{OH} = t\vec{n}$. Bởi vậy, nếu gọi $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ là toạ độ của H thì

$$\begin{cases} x + 2y + 5z - 30 = 0 \\ x = t \\ y = 2t \\ z = 5t. \end{cases}$$

Bằng cách thay các giá trị x, y, z từ ba phương trình cuối vào phương trình đầu, ta được $t + 4t + 25t - 30 = 0$. Từ đó ta tìm được $t = 1$ và do đó $H = (1 ; 2 ; 5)$

3. Vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng

Hai bộ số tỉ lệ

Xét các bộ n số $(x_1 ; x_2 ; ... ; x_n)$ $(n > 2)$, trong đó các số $x_1, x_2, ..., x_n$ không đồng thời bằng 0.

- Hai bộ số $(A_1 ; A_2 ; ... ; A_n)$ và $(B_1 ; B_2 ; ... ; B_n)$ như thế được gọi là *tỉ lệ với nhau* (hay *tỉ lệ*) nếu có một số t sao cho $A_1 = tB_1, A_2 = tB_2, ..., A_n = tB_n$. Khi đó ta viết

$$A_1 : A_2 : ... : A_n = B_1 : B_2 : ... : B_n \text{ hoặc } \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = ... = \frac{A_n}{B_n}.$$

Theo định nghĩa đó, ta có

$$1 : -2 : 3 = 2 : -4 : 6 \text{ hay } \frac{1}{2} = \frac{-2}{-4} = \frac{3}{6} \text{ (ở đây } t = \frac{1}{2}\text{) ;}$$

$$2 : 0 : 4 : 0 = 1 : 0 : 2 : 0 \text{ hay } \frac{2}{1} = \frac{0}{0} = \frac{4}{2} = \frac{0}{0} \text{ (ở đây } t = 2\text{).}$$

- Khi hai bộ số $(A_1 ; A_2 ; ... ; A_n)$ và $(B_1 ; B_2 ; ... ; B_n)$ không tỉ lệ, ta viết

$$A_1 : A_2 : ... : A_n \neq B_1 : B_2 : ... : B_n.$$

Ví dụ : $1 : 5 : -2 : 4 \neq 1 : -2 : 5 : 4$, $1 : 0 : 1 : 2 \neq 1 : 1 : 1 : 2$.

- Ta hãy xét trường hợp hai bộ số $(A_1 ; A_2 ; ... ; A_n)$ và $(B_1 ; B_2 ; ... ; B_n)$ tỉ lệ, nhưng hai bộ số $(A_1 ; A_2 ; ... ; A_n ; A_{n+1})$ và $(B_1 ; B_2 ; ... ; B_n ; B_{n+1})$ không tỉ lệ. Điều đó có nghĩa là : có số t sao cho $A_1 = tB_1, A_2 = tB_2, ..., A_n = tB_n$ nhưng $A_{n+1} \neq tB_{n+1}$. Trong trường hợp đó, ta viết :

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = ... = \frac{A_n}{B_n} \neq \frac{A_{n+1}}{B_{n+1}}.$$

Vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$ cho hai mặt phẳng (α) và (α') lần lượt có phương trình :

$$(\alpha) : Ax + By + Cz + D = 0$$
$$(\alpha') : A'x + B'y + C'z + D' = 0 ;$$

chúng lần lượt có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}(A ; B ; C)$ và $\vec{n'}(A' ; B' ; C')$.

?1 *Nếu* $A : B : C \neq A' : B' : C'$ *thì ta có thể nói gì về hai vectơ* $\vec{n}(A\,;B\,;C)$ *và* $\vec{n'}(A'\,;B'\,;C')$ *và do đó nói gì về vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng* (α) *và* (α') *?*

Bây giờ ta xét trường hợp $A : B : C = A' : B' : C'$ hay $\dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} = \dfrac{C}{C'}$.

4

Hãy xét vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng (α) và (α') trong mỗi trường hợp sau :

a) $\dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} = \dfrac{C}{C'} \neq \dfrac{D}{D'}$;

b) $\dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} = \dfrac{C}{C'} = \dfrac{D}{D'}$.

Tóm lại ta có :

> *Cho hai mặt phẳng* (α) *và* (α') *lần lượt có phương trình :*
>
> $$(\alpha) : Ax + By + Cz + D = 0$$
>
> $$(\alpha') : A'x + B'y + C'z + D' = 0.$$
>
> a) *Hai mặt phẳng đó cắt nhau khi và chỉ khi* $A : B : C \neq A' : B' : C'$.
>
> b) *Hai mặt phẳng đó song song khi và chỉ khi*
>
> $$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}.$$
>
> c) *Hai mặt phẳng đó trùng nhau khi và chỉ khi*
>
> $$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}.$$

?2 *Hai mặt phẳng* (α) *và* (α') *nói trên vuông góc với nhau khi nào ?*

5

Cho hai mặt phẳng $(\alpha) : 2x - my + 10z + m + 1 = 0$

$$(\beta) : x - 2y + (3m + 1)z - 10 = 0.$$

Hãy tìm giá trị của m để :

a) Hai mặt phẳng đó song song ;

b) Hai mặt phẳng đó trùng nhau ;

c) Hai mặt phẳng đó cắt nhau ;

d) Hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau.

4. Khoảng cách từ một điểm tới một mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M_0(x_0\ ;\ y_0\ ;\ z_0)$ và mặt phẳng (α) có phương trình : $Ax + By + Cz + D = 0$. Hoàn toàn tương tự như công thức tính khoảng cách từ một điểm tới một đường thẳng trong hình học phẳng, ta có công thức sau đây về khoảng cách $d(M_0, (\alpha))$ từ điểm M_0 tới mp(α) :

$$\boxed{d(M_0, (\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.}$$

6

Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng có phương trình lần lượt là :

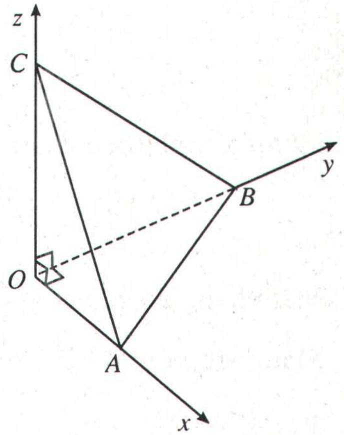
$$3x - y + 2z - 6 = 0 \quad \text{và} \quad 6x - 2y + 4z + 4 = 0.$$

Ví dụ 4. *Cho tứ diện OABC có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc, OA = a, OB = b, OC = c. Tính độ dài đường cao của tứ diện kẻ từ O.*

Giải

Vì ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc nên ta có thể chọn hệ toạ độ có gốc là O và có $A = (a\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $B = (0\ ;\ b\ ;\ 0)$, $C = (0\ ;\ 0\ ;\ c)$ (h.64). Khi đó mp(ABC) có phương trình theo đoạn chắn là

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0.$$



Hình 64

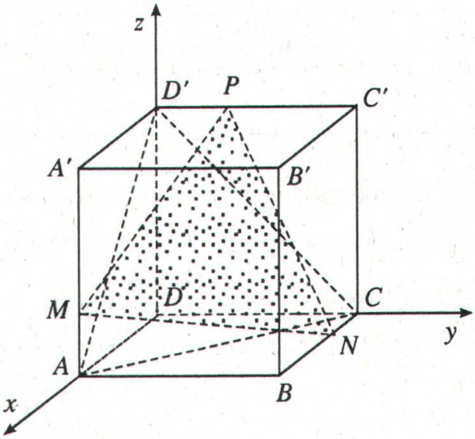
Chiều cao h cần tìm là khoảng cách từ điểm O tới mp(ABC) nên

$$h = \frac{|0 + 0 + 0 - 1|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} = \frac{abc}{\sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}}.$$ ■

Ví dụ 5. *Cho hình lập phương ABCD.A′B′C′D′ cạnh a. Trên các cạnh AA′, BC, C′D′ lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho AM = CN = D′P = t, với 0 < t < a. Chứng minh rằng mp(MNP) song song với mp(ACD′) và tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng đó.*

Giải

Chọn hệ toạ độ $Oxyz$ có gốc O trùng với D, các trục Ox, Oy, Oz lần lượt đi qua A, C và D' như ở hình 65. Khi đó : $A = (a\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $C = (0\ ;\ a\ ;\ 0)$, $D' = (0\ ;\ 0\ ;\ a)$, $M = (a\ ;\ 0\ ;\ t)$, $N = (t\ ;\ a\ ;\ 0)$, $P = (0\ ;\ t\ ;\ a)$.



Hình 65

Phương trình theo đoạn chắn của mp(ACD') là :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{a} = 1 \text{ hay } x + y + z - a = 0.$$

Mặt phẳng đó có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1\ ;\ 1\ ;\ 1)$.

Mặt khác, mp(MNP) có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n'} = \left[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}\right]$.

Ta có $\overrightarrow{MN} = (t - a\ ;\ a\ ;\ -t)\ ;\ \overrightarrow{MP} = (-a\ ;\ t\ ;\ a - t)$.

Từ đó ta tìm được toạ độ của $\overrightarrow{n'}$ là

$$\overrightarrow{n'} = (a^2 + t^2 - at\ ;\ a^2 + t^2 - at\ ;\ a^2 + t^2 - at).$$

Bởi vậy hai vectơ $\vec{n}$ và $\overrightarrow{n'}$ cùng phương ; ngoài ra dễ thấy điểm M không nằm trên mp(ACD') ; do đó mp(MNP) // mp(ACD').

Khoảng cách d giữa hai mặt phẳng đó bằng khoảng cách từ điểm M của mp(MNP) tới mp(ACD') nên ta có

$$d = \frac{|a + 0 + t - a|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{t\sqrt{3}}{3}.$$ ■

Câu hỏi và bài tập

15. Viết phương trình mặt phẳng trong mỗi trường hợp sau :

a) Đi qua ba điểm $M(2 ; 0 ; -1)$, $N(1 ; -2 ; 3)$, $P(0 ; 1 ; 2)$;

b) Đi qua hai điểm $A(1 ; 1 ; -1)$, $B(5 ; 2 ; 1)$ và song song với trục Oz ;

c) Đi qua điểm $(3 ; 2 ; -1)$ và song song với mặt phẳng có phương trình $x - 5y + z = 0$;

d) Đi qua hai điểm $A(0 ; 1 ; 1)$, $B(-1 ; 0 ; 2)$ và vuông góc với mặt phẳng $x - y + z + 1 = 0$;

e) Đi qua điểm $M(a ; b ; c)$ $(abc \neq 0)$ và song song với một mặt phẳng toạ độ ;

g) Đi qua điểm $G(1 ; 2 ; 3)$ và cắt các trục toạ độ tại các điểm A, B, C sao cho G là trọng tâm tam giác ABC ;

h) Đi qua điểm $H(2 ; 1 ; 1)$ và cắt các trục toạ độ tại các điểm A, B, C sao cho H là trực tâm của tam giác ABC.

16. Xét vị trí tương đối của mỗi cặp mặt phẳng cho bởi các phương trình sau :

a) $x + 2y - z + 5 = 0$ và $2x + 3y - 7z - 4 = 0$;

b) $x - 2y + z - 3 = 0$ và $2x - y + 4z - 2 = 0$;

c) $x + y + z - 1 = 0$ và $2x + 2y + 2z + 3 = 0$;

d) $3x - 2y + 3z + 5 = 0$ và $9x - 6y - 9z - 5 = 0$;

e) $x - y + 2z - 4 = 0$ và $10x - 10y + 20z - 40 = 0$.

17. Xác định giá trị của m và n để mỗi cặp mặt phẳng sau đây song song :

a) $2x + ny + 2z + 3 = 0$ và $mx + 2y - 4z + 7 = 0$;

b) $2x + y + mz - 2 = 0$ và $x + ny + 2z + 8 = 0$.

18. Cho hai mặt phẳng có phương trình lần lượt là :

$$2x - my + 3z - 6 + m = 0$$

và

$$(m + 3)x - 2y + (5m + 1)z - 10 = 0.$$

Với giá trị nào của m thì :

a) Hai mặt phẳng đó song song ?

b) Hai mặt phẳng đó trùng nhau ?

c) Hai mặt phẳng đó cắt nhau ?

d) Hai mặt phẳng đó vuông góc ?

19. Tìm tập hợp các điểm cách đều hai mặt phẳng (α) và (α') trong mỗi trường hợp sau :

a) $(\alpha) : 2x - y + 4z + 5 = 0,\quad (\alpha') : 3x + 5y - z - 1 = 0$;

b) $(\alpha) : 2x + y - 2z - 1 = 0,\quad (\alpha') : 6x - 3y + 2z - 2 = 0$;

c) $(\alpha) : x + 2y + z - 1 = 0,\quad (\alpha') : x + 2y + z + 5 = 0$.

20. Tìm khoảng cách giữa hai mặt phẳng

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

và $$Ax + By + Cz + D' = 0 \text{ với } D \neq D'.$$

21. Tìm điểm M trên trục Oz trong mỗi trường hợp sau :

a) M cách đều điểm $A(2\ ;\ 3\ ;\ 4)$ và mặt phẳng $2x + 3y + z - 17 = 0$;

b) M cách đều hai mặt phẳng $x + y - z + 1 = 0$ và $x - y + z + 5 = 0$.

22. Cho tứ diện $OABC$ có các tam giác OAB, OBC, OCA là những tam giác vuông đỉnh O. Gọi α, β, γ lần lượt là góc giữa mặt phẳng (ABC) và các mặt phẳng (OBC), (OCA), (OAB). Bằng phương pháp toạ độ, hãy chứng minh :

a) Tam giác ABC có ba góc nhọn ;

b) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

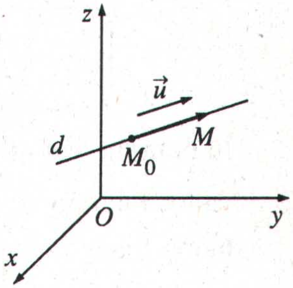
23. Viết phương trình mặt phẳng song song với mặt phẳng $4x + 3y - 12z + 1 = 0$ và tiếp xúc với mặt cầu có phương trình :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 2 = 0.$$

§3 PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

1. Phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng

- Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua điểm $M_0(x_0 ; y_0 ; z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(a ; b ; c)$ (h.66). Vì $\vec{u} \neq \vec{0}$ nên ta phải có $a^2 + b^2 + c^2 > 0$.



Hình 66

Ta biết rằng điều kiện cần và đủ để điểm $M(x ; y ; z)$ nằm trên đường thẳng d là vectơ $\overrightarrow{M_0M}$ cùng phương với vectơ $\vec{u}$, tức là có số $t \in \mathbb{R}$ sao cho $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{u}$. Chú ý rằng

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0 ; y - y_0 ; z - z_0)$$

nên điều kiện nói trên tương đương với :

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \quad \text{trong đó } a^2 + b^2 + c^2 > 0.} \qquad (1)$$

Hệ phương trình (1) được gọi là *phương trình tham số* của đường thẳng d với tham số là t. Với mỗi giá trị của tham số t, hệ phương trình trên cho ta ba giá trị x, y, z là toạ độ của một điểm nằm trên d.

Ngược lại, mỗi hệ phương trình dạng (1) đều là phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $(x_0 ; y_0 ; z_0)$ và có vectơ chỉ phương là $\vec{u}(a ; b ; c)$.

1

Cho đường thẳng d có phương trình tham số :

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + t \\ z = 2t. \end{cases}$$

a) Hãy tìm toạ độ một vectơ chỉ phương của d.

b) Xác định toạ độ của các điểm thuộc d ứng với giá trị $t = 0$, $t = 1$, $t = -2$.

c) Trong các điểm $A(3 ; 1 ; -2)$, $B(-3 ; 4 ; 2)$, $C(0 ; 2{,}5 ; 1)$, điểm nào thuộc d, điểm nào không ?

Xét đường thẳng d có phương trình tham số (1).

Trong trường hợp $abc \neq 0$, bằng cách khử t từ các phương trình của hệ (1), ta được :

$$\boxed{\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}, \text{ với } abc \neq 0.} \qquad (2)$$

Hệ phương trình (2) được gọi là *phương trình chính tắc* của đường thẳng d.

Ngược lại, mỗi hệ phương trình như thế đều là phương trình chính tắc của một đường thẳng hoàn toàn xác định, đó là đường thẳng đi qua điểm $(x_0 ; y_0 ; z_0)$ và có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}(a ; b ; c)$.

2

Cho hai mặt phẳng (α) và (α') có phương trình :

$$(\alpha): 2x + 2y + z - 4 = 0$$
$$(\alpha'): 2x - y - z + 5 = 0.$$

a) Hãy giải thích tại sao hai mặt phẳng (α) và (α') cắt nhau.

b) Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (α'). Hãy tìm toạ độ của một điểm thuộc d và xác định toạ độ của một vectơ chỉ phương của d.

c) Viết phương trình tham số và chính tắc của đường thẳng d.

2. Một số ví dụ

Ví dụ 1. *Viết phương trình tham số của đường thẳng d đi qua hai điểm phân biệt $A(1 ; 0 ; -2)$ và $A'(2 ; 1 ; 1)$.*

Giải

Vectơ $\overrightarrow{AA'} = (1 ; 1 ; 3)$ là một vectơ chỉ phương của d, ngoài ra d đi qua điểm A và A' nên d có phương trình tham số là :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = -2 + 3t \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 3t. \end{cases}$$

■

Ví dụ 2. *Trong không gian toạ độ Oxyz, cho tứ diện ABCD với*

$$A = (0\,;0\,;2),\ B = (3\,;0\,;5),\ C = (1\,;1\,;0),\ D = (4\,;1\,;2).$$

a) Viết phương trình tham số của đường cao tứ diện ABCD hạ từ D.

b) Tìm toạ độ hình chiếu H của D trên mặt phẳng (ABC).

Giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (3\,;0\,;3)$, $\overrightarrow{AC} = (1\,;1\,;-2)$.

Vì $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (-3\,;9\,;3)$ nên một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là $\vec{n} = (1\,;-3\,;-1)$.

Vậy phương trình tham số của đường cao d hạ từ D của tứ diện là

$$d : \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 1 - 3t \\ z = 2 - t. \end{cases}$$

b) Mặt phẳng (ABC) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1\,;-3\,;-1)$ và đi qua $A(0\,;0\,;2)$ nên có phương trình là

$$1(x-0) - 3(y-0) - 1(z-2) = 0$$

hay $x - 3y - z + 2 = 0$.

Hình chiếu H của D trên mặt phẳng (ABC) là giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng (ABC). Để tìm toạ độ điểm H, ta giải hệ gồm các phương trình của đường thẳng d và mp(ABC) :

$$\begin{cases} x = 4 + t \\ y = 1 - 3t \\ z = 2 - t \\ x - 3y - z + 2 = 0. \end{cases}$$

Thay các giá trị của x, y, z trong ba phương trình đầu vào phương trình cuối, ta có $4+t-3(1-3t)-(2-t)+2=0$. Từ đó suy ra $t=-\frac{1}{11}\cdot$ Do đó

$$\begin{cases} x = 4 - \frac{1}{11} = \frac{43}{11} \\ y = 1 + \frac{3}{11} = \frac{14}{11} \\ z = 2 + \frac{1}{11} = \frac{23}{11}. \end{cases}$$

Vậy $\qquad H = \left(\frac{43}{11} ; \frac{14}{11} ; \frac{23}{11}\right).$ ■

Ví dụ 3. *Cho hai mặt phẳng* (α) *và* (α') *lần lượt có phương trình*

$$x + 2y - z + 1 = 0 \quad \text{và} \quad x + y + 2z + 3 = 0.$$

Chứng tỏ rằng hai mặt phẳng đó cắt nhau và viết phương trình tham số của giao tuyến hai mặt phẳng đó.

Giải

Hai mặt phẳng đã cho cắt nhau vì bộ ba số $(1 ; 2 ; -1)$ không tỉ lệ với bộ ba số $(1 ; 1 ; 2)$.

Gọi d là đường thẳng giao tuyến của chúng. Đường thẳng d gồm các điểm $M(x ; y ; z)$ vừa thuộc (α) vừa thuộc (α') nên toạ độ của M là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0 \\ x + y + 2z + 3 = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Bây giờ ta có thể viết phương trình tham số của d bằng một trong các cách sau đây :

Cách 1. Tìm toạ độ một điểm A thuộc d và một vectơ chỉ phương của nó rồi viết phương trình tham số của d.

Cụ thể là : trong hệ (1) cho $z = 0$ rồi tìm x và y, ta được $x = -5, y = 2$. Vậy điểm $A(-5 ; 2 ; 0)$ thuộc d.

Gọi $\overrightarrow{n_1} = (1 ; 2 ; -1)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α), $\overrightarrow{n_2} = (1 ; 1 ; 2)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α'). Đường thẳng d vuông góc với hai vectơ $\overrightarrow{n_1}$ và $\overrightarrow{n_2}$ nên nó có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = \left[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right] = (5 ; -3 ; -1)$.

Vậy, phương trình tham số của đường thẳng d là

$$\begin{cases} x = -5 + 5t \\ y = 2 - 3t \\ z = -t. \end{cases}$$

Cách 2. Tìm toạ độ hai điểm phân biệt A và A' thuộc d rồi viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm đó.

Cụ thể là : Trong hệ (1) cho $z = 0$, ta tìm được $x = -5$, $y = 2$. Vậy điểm $A(-5 ; 2 ; 0)$ thuộc d.

Lại cho $z = 1$, ta được $x = -10$, $y = 5$. Vậy $A'(-10 ; 5 ; 1)$ cũng thuộc d.

Vectơ chỉ phương của d là $\overrightarrow{AA'} = (-5 ; 3 ; 1)$ nên d có phương trình tham số là :

$$\begin{cases} x = -10 - 5t \\ y = 5 + 3t \\ z = 1 + t. \end{cases}$$

Cách 3. Trong hệ (1) cho z = t rồi tìm x và y theo t, ta được

$$\begin{cases} x = -5 - 5t \\ y = 2 + 3t \\ z = t. \end{cases}$$

Đó cũng là phương trình tham số của đường thẳng d. ■

Ví dụ 4. *Cho hai đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt có phương trình là*

$$d_1 : \begin{cases} x = t \\ y = -1 - 4t \\ z = 6 + 6t \end{cases} \quad \text{và} \quad d_2 : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{-5}.$$

Viết phương trình chính tắc của đường thẳng d_3 đi qua điểm $M(1 ; -1 ; 2)$, vuông góc với cả d_1 và d_2.

Giải

Các đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt có vectơ chỉ phương là

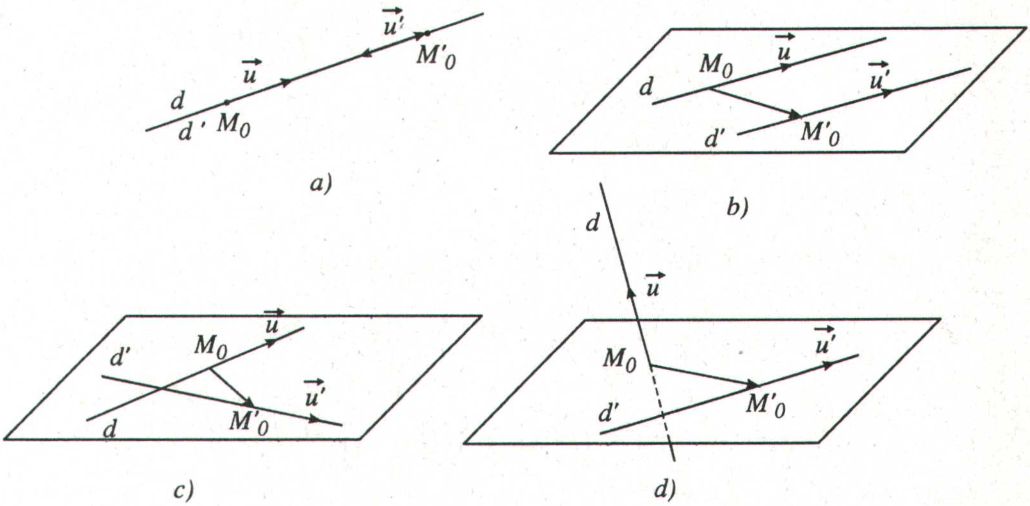
$$\overrightarrow{u_1}(1 ; -4 ; 6) \text{ và } \overrightarrow{u_2}(2 ; 1 ; -5).$$

Đường thẳng d_3 vuông góc với cả d_1 và d_2 nên một vectơ chỉ phương của d_3 là $\overrightarrow{u_3} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right]$. Ta tính được $\overrightarrow{u_3} = (14; 17; 9)$ và do đó, d_3 có phương trình chính tắc là

$$\frac{x-1}{14} = \frac{y+1}{17} = \frac{z-2}{9}. \quad \blacksquare$$

3. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng

Trong không gian, cho đường thẳng d đi qua điểm M_0, có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ và đường thẳng d' đi qua điểm M'_0, có vectơ chỉ phương $\vec{u'}$. Dựa vào ba vectơ $\vec{u}, \vec{u'}$ và $\overrightarrow{M_0M'_0}$, ta có thể biết được vị trí tương đối giữa hai đường thẳng d và d'.



a) b) c) d)

Hình 67

Cụ thể là :

a) d và d' trùng nhau khi và chỉ khi ba vectơ $\vec{u}, \vec{u'}$ và $\overrightarrow{M_0M'_0}$ cùng phương (h.67a).

b) $d \parallel d'$ khi và chỉ khi $\vec{u}$ và $\vec{u'}$ cùng phương với nhau nhưng không cùng phương với $\overrightarrow{M_0M'_0}$ (h.67b).

c) d và d' cắt nhau khi và chỉ khi $\vec{u}$ và $\vec{u'}$ không cùng phương, đồng thời ba vectơ $\vec{u}, \vec{u'}$ và $\overrightarrow{M_0M_0'}$ đồng phẳng (h.67c).

d) d và d' chéo nhau khi và chỉ khi d, d' không đồng phẳng, hay khi và chỉ khi ba vectơ $\vec{u}, \vec{u'}$ và $\overrightarrow{M_0M_0'}$ không đồng phẳng (h.67d).

Vậy ta có :

d và d' trùng nhau $\Leftrightarrow \vec{u}, \vec{u'}$ và $\overrightarrow{M_0M_0'}$ cùng phương

$$\Leftrightarrow \left[\vec{u},\vec{u'}\right] = \left[\vec{u}, \overrightarrow{M_0M_0'}\right] = \vec{0}$$

$$d \,//\, d' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} \text{ và } \vec{u'} \text{ cùng phương} \\ \vec{u} \text{ và } \overrightarrow{M_0M_0'} \text{ không cùng phương} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\vec{u}, \vec{u'}\right] = \vec{0} \\ \left[\vec{u}, \overrightarrow{M_0M_0'}\right] \neq \vec{0} \end{cases}$$

d và d' cắt nhau

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} \text{ và } \vec{u'} \text{ không cùng phương} \\ \vec{u}, \vec{u'} \text{ và } \overrightarrow{M_0M_0'} \text{ đồng phẳng} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\vec{u}, \vec{u'}\right] \neq \vec{0} \\ \left[\vec{u}, \vec{u'}\right].\overrightarrow{M_0M_0'} = 0 \end{cases}$$

d và d' chéo nhau $\Leftrightarrow \vec{u}, \vec{u'}$ và $\overrightarrow{M_0M_0'}$ không đồng phẳng

$$\Leftrightarrow \left[\vec{u}, \vec{u'}\right].\overrightarrow{M_0M_0'} \neq 0.$$

? *Hai đường thẳng d và d' nói trên vuông góc với nhau khi nào ?*

Ví dụ 5. *Trong không gian Oxyz, xét cặp đường thẳng d_m, d'_m có phương trình là :*

$$d_m : \begin{cases} x = 1 + mt \\ y = m + 2t \\ z = 1 - m - 3t \end{cases} \qquad d'_m : \begin{cases} x = m - 2t' \\ y = mt' \\ z = 1 - m + t'. \end{cases}$$

Xác định vị trí tương đối giữa hai đường thẳng đó tuỳ theo giá trị của m.

Giải

Đường thẳng d_m đi qua điểm $M(1\ ;\ m\ ;\ 1-m)$ và có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(m;2;-3)$. Đường thẳng d'_m đi qua điểm $M'(m\ ;\ 0\ ;\ 1-m)$ và có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u'}=(-2\ ;\ m\ ;\ 1)$. Ta có $\overrightarrow{MM'}=(m-1\ ;\ -m\ ;\ 0)$.

Từ đó ta tính được :

$$\left[\vec{u},\overrightarrow{u'}\right].\overrightarrow{MM'}=4m^2-7m-2=4(m-2)\left(m+\frac{1}{4}\right).$$

Vậy :

1) Nếu $m\neq 2$ và $m\neq -\frac{1}{4}$ thì hai đường thẳng đã cho chéo nhau.

2) Nếu $m=2$ thì $\vec{u}=(2\ ;\ 2\ ;\ -3)$ và $\overrightarrow{u'}=(-2\ ;\ 2\ ;\ 1)$ không cùng phương, suy ra hai đường thẳng đã cho cắt nhau.

3) Nếu $m=-\frac{1}{4}$ thì $\vec{u}=\left(-\frac{1}{4}\ ;\ 2\ ;\ -3\right)$ và $\overrightarrow{u'}=\left(-2\ ;\ -\frac{1}{4}\ ;\ 1\right)$ cũng không cùng phương, suy ra hai đường thẳng đã cho cắt nhau. ■

CHÚ Ý

Nếu biết phương trình của hai đường thẳng *d* và *d'* thì ta cũng có thể xét vị trí tương đối giữa chúng bằng cách giải hệ gồm các phương trình xác định *d* và *d'* để tìm giao điểm.

Nếu hệ phương trình có nghiệm duy nhất thì *d* và *d'* cắt nhau.

Nếu hệ phương trình có vô số nghiệm thì *d* và *d'* trùng nhau.

Nếu hệ phương trình vô nghiệm thì *d* và *d'* song song hoặc chéo nhau, song song nếu hai vectơ chỉ phương của chúng cùng phương, chéo nhau nếu hai vectơ đó không cùng phương.

Ví dụ 6. *Cho đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng*

$$(\alpha): x+y=0 \quad \text{và} \quad (\alpha'): 2x-y+z-15=0$$

và đường thẳng d' có phương trình

$$\begin{cases} x=1-t \\ y=2+2t \\ z=3. \end{cases}$$

Xác định vị trí tương đối giữa hai đường thẳng d và d'.

Giải

Cách 1

Trong hệ gồm hai phương trình của hai mặt phẳng (α) và (α'), ta cho $x = 0$ thì $y = 0$ và $z = 15$. Vậy điểm $M(0 ; 0 ; 15)$ nằm trên d.

Lại cho $x = 1$ thì $y = -1$ và $z = 12$. Vậy điểm $N(1 ; -1 ; 12)$ nằm trên d.

Như vậy d là đường thẳng đi qua M và có vectơ chỉ phương

$$\vec{u} = \overrightarrow{MN} = (1 ; -1 ; -3).$$

Đường thẳng d' đi qua $M'(1 ; 2 ; 3)$ và có vectơ chỉ phương

$$\overrightarrow{u'} = (-1 ; 2 ; 0).$$

Ta có $\overrightarrow{MM'} = (1 ; 2 ; -12)$.

Dễ thấy rằng $\overrightarrow{MM'} = 4\vec{u} + 3\overrightarrow{u'}$, tức là ba vectơ $\vec{u}, \overrightarrow{u'}, \overrightarrow{MM'}$ đồng phẳng.

Ngoài ra hai vectơ $\vec{u}, \overrightarrow{u'}$ không cùng phương.

Từ đó suy ra hai đường thẳng d và d' cắt nhau.

Cách 2

Mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{u_1}(1 ; 1 ; 0)$.

Mặt phẳng (α') có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{u_2}(2 ; -1 ; 1)$.

Do đó, vectơ chỉ phương của d là $\vec{u} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = (1 ; -1 ; -3)$.

Đường thẳng d' có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u'} = (-1 ; 2 ; 0)$.

Ta có $\left[\vec{u}, \overrightarrow{u'}\right] = (6 ; 3 ; 1) \neq \vec{0}$.

Mặt khác, điểm $M_0(0 ; 0 ; 15) \in d$, điểm $M'_0(1 ; 2 ; 3) \in d'$,

$$\overrightarrow{M_0M'_0} = (1 ; 2 ; -12).$$

Ta suy ra $\left[\vec{u}, \overrightarrow{u'}\right].\overrightarrow{M_0M'_0} = 0$.

Vậy hai đường thẳng d và d' cắt nhau.

Cách 3

Để tìm toạ độ giao điểm của d và d', ta giải hệ phương trình sau đây :

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - y + z - 15 = 0 \\ x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3. \end{cases}$$

Bằng cách thay các giá trị của x, y, z ở ba phương trình cuối vào hai phương trình đầu của hệ, ta được

$$\begin{cases} 2(1 - t) - (2 + 2t) + 3 - 15 = 0 \\ 1 - t + 2 + 2t \quad = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4t - 12 = 0 \\ t + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = -3.$$

Khi đó $x = 4$, $y = -4$, $z = 3$.

Vậy hai đường thẳng d và d' cắt nhau tại điểm $(4 ; -4 ; 3)$. ■

4. Một số bài toán về tính khoảng cách

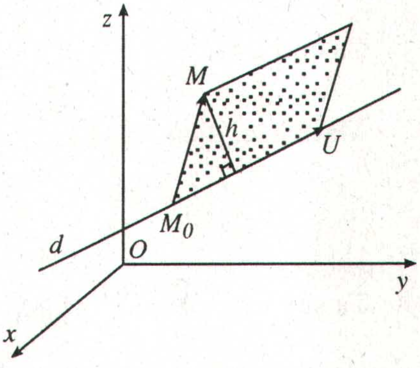
Ta đã có các công thức để tính khoảng cách giữa hai điểm và khoảng cách từ một điểm tới một mặt phẳng. Bây giờ, ta xét khoảng cách từ một điểm tới một đường thẳng và khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.

Bài toán 1. *Tính khoảng cách h từ một điểm M đến đường thẳng d đi qua điểm M_0 và có vectơ chỉ phương $\vec{u}$.*

Cách giải

Gọi U là điểm sao cho $\overrightarrow{M_0U} = \vec{u}$ (h.68).

Nếu $M \notin d$ thì diện tích S của hình bình hành có hai cạnh M_0M và M_0U là



Hình 68

$$S = \left|\left[\overrightarrow{M_0M},\ \overrightarrow{M_0U}\right]\right| = \left|\left[\overrightarrow{M_0M}, \vec{u}\right]\right|.$$

Vì khoảng cách h cần tìm là chiều cao của hình bình hành ứng với cạnh M_0U nên ta có

$$h = \frac{\left|\left[\overrightarrow{M_0M}, \vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}.$$

Nếu $M \in d$ thì hiển nhiên $h = 0$ và công thức nói trên vẫn đúng. ■

3

Tính khoảng cách từ điểm $M(4\,;-3\,;2)$ đến đường thẳng *d* có phương trình

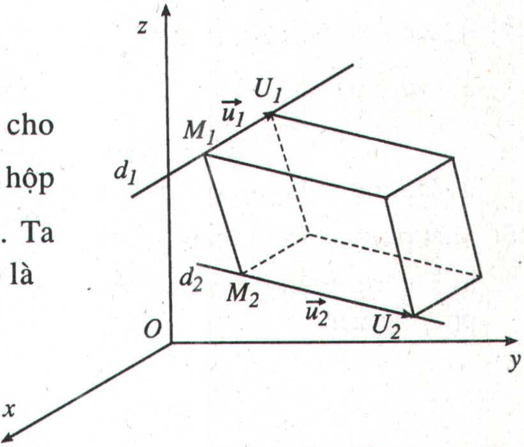
$$\frac{x+2}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{-1}.$$

Bài toán 2. *Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau* d_1 *và* d_2, *biết* d_1 *đi qua điểm* M_1 *và có vectơ chỉ phương* $\overrightarrow{u_1}$; d_2 *đi qua điểm* M_2 *và có vectơ chỉ phương* $\overrightarrow{u_2}$.

Cách giải (h.69)

Lấy các điểm U_1 và U_2 sao cho $\overrightarrow{M_1U_1} = \overrightarrow{u_1}$; $\overrightarrow{M_2U_2} = \overrightarrow{u_2}$. Xét hình hộp có ba cạnh là M_1U_1, M_2U_2, M_1M_2. Ta biết rằng thể tích V của hình hộp đó là

$$V = \left|\left[\overrightarrow{M_1U_1}, \overrightarrow{M_2U_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2}\right|$$
$$= \left|\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2}\right|.$$



Hình 69

Nếu ta xem M_1M_2 là cạnh bên của hình hộp đó thì diện tích mặt đáy của hình hộp là $S = \left|\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right]\right|$. Khi đó, chiều cao h của hình hộp chính là khoảng cách giữa hai đường thẳng d_1 và d_2. Vậy ta có :

$$h = \frac{\left|\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right]\right|}.$$ ■

4

Hãy tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau d_1, d_2 có phương trình như sau :

$$d_1 : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-6}{3} \text{ và } d_2 : \begin{cases} x = 1+t \\ y = -2+t \\ z = 3-t. \end{cases}$$

Bài tập

24. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình tham số và chính tắc (nếu có) của các đường thẳng sau đây :

a) Các trục tọa độ Ox, Oy và Oz ;

b) Các đường thẳng đi qua điểm $M_0(x_0 ; y_0 ; z_0)$ (với $x_0.y_0.z_0 \neq 0$) và song song với mỗi trục toạ độ ;

c) Đường thẳng đi qua $M(2 ; 0 ; -1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(-1 ; 3 ; 5)$;

d) Đường thẳng đi qua $N(-2 ; 1 ; 2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(0; 0; -3)$;

e) Đường thẳng đi qua $N(3 ; 2 ; 1)$ và vuông góc với mặt phẳng

$$2x - 5y + 4 = 0 ;$$

g) Đường thẳng đi qua hai điểm $P(2 ; 3 ; -1)$ và $Q(1 ; 2 ; 4)$.

25. Viết phương trình tham số, chính tắc (nếu có) của các đường thẳng sau đây :

a) Đường thẳng đi qua điểm $(4 ; 3 ; 1)$ và song song với đường thẳng có phương trình :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3t \\ z = 3 + 2t. \end{cases}$$

b) Đường thẳng đi qua điểm $(-2 ; 3 ; 1)$ và song song với đường thẳng có phương trình :

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{3}.$$

26. Viết phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng

$$d : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{1}$$

trên mỗi mặt phẳng toạ độ.

27. Cho đường thẳng $d : \begin{cases} x = t \\ y = 8 + 4t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ và mặt phẳng $(P) : x + y + z - 7 = 0$.

a) Tìm một vectơ chỉ phương của d và một điểm nằm trên d.

b) Viết phương trình mặt phẳng đi qua d và vuông góc với mp(P).

c) Viết phương trình hình chiếu vuông góc của d trên mp(P).

28. Xác định vị trí tương đối giữa các cặp đường thẳng d và d' cho bởi phương trình :

a) $d : \dfrac{x-1}{2} = y - 7 = \dfrac{z-3}{4}$; $\quad d' : \dfrac{x-3}{6} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z+2}{1}$.

b) $d : \begin{cases} x = t \\ y = -3 - 4t \\ z = -3 - 3t \text{ ;} \end{cases}$ $\quad d'$ là giao tuyến của hai mặt phẳng :

$$(\alpha) : x + y - z = 0,$$

$$(\alpha') : 2x - y + 2z = 0.$$

29. Viết phương trình đường thẳng đi qua $A(1 ; -1 ; 1)$ và cắt cả hai đường thẳng sau đây :

$$d : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 3 - t \text{ ;} \end{cases} \qquad d' : \begin{cases} x = t \\ y = -1 - 2t \\ z = 2 + t. \end{cases}$$

30. Viết phương trình đường thẳng song song với đường thẳng d_1 và cắt cả hai đường thẳng d_2 và d_3, biết phương trình của d_1, d_2 và d_3 là :

$$d_1 : \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 + 4t \\ z = 1 - t \end{cases} ; \quad d_2 : \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-2}{3} ; \quad d_3 : \begin{cases} x = -4 + 5t' \\ y = -7 + 9t' \\ z = t'. \end{cases}$$

31. Cho hai đường thẳng :

$$d_1 : \begin{cases} x = 8 + t \\ y = 5 + 2t \\ z = 8 - t \end{cases} \quad \text{và} \quad d_2 : \frac{3-x}{7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}.$$

a) Chứng tỏ rằng hai đường thẳng đó chéo nhau.

b) Viết phương trình mặt phẳng đi qua gốc toạ độ O và song song với d_1 và d_2.

c) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng d_1 và d_2.

d) Viết phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng đó.

32. Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α) có phương trình :

$$d : \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{5} \; ; \qquad (\alpha) : 2x + y + z - 8 = 0.$$

a) Tìm góc giữa d và (α).

b) Tìm toạ độ giao điểm của d và (α).

c) Viết phương trình hình chiếu vuông góc của d trên (α).

33. Cho đường thẳng Δ và mp(P) có phương trình :

$$\Delta : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{2} \; ; \qquad (P) : 2x + z - 5 = 0.$$

a) Xác định toạ độ giao điểm A của Δ và (P).

b) Viết phương trình đường thẳng đi qua A, nằm trong (P) và vuông góc với Δ.

34. a) Tính khoảng cách từ điểm $M(2 ; 3 ; 1)$ đến đường thẳng Δ có phương trình :

$$\frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-2}.$$

b) Tính khoảng cách từ điểm $N(2 ; 3 ; -1)$ đến đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0\left(-\frac{1}{2} ; 0 ; -\frac{3}{4}\right)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(-4 ; 2 ; -1)$.

35. Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng sau :

a) $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = 1 \end{cases}$ và $\begin{cases} x = 2 - 3t' \\ y = -2 + 3t' \\ z = 3 ; \end{cases}$

b) $\dfrac{x}{-1} = \dfrac{y-4}{1} = \dfrac{z+1}{-2}$ và $\begin{cases} x = -t' \\ y = 2 + 3t' \\ z = -4 + 3t'. \end{cases}$

ÔN TẬP CHƯƠNG III

I - Kiến thức cần nhớ

1. *Toạ độ của điểm và toạ độ của vectơ*

+ Điểm M có toạ độ $(x\,;\,y\,;\,z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

+ Vectơ $\vec{u}$ có toạ độ $(x\,;\,y\,;\,z) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

+ Nếu điểm $A = (x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ và điểm $B = (x_B\,;\,y_B\,;\,z_B)$ thì

$$\overrightarrow{AB} = \left(x_B - x_A\,;\,y_B - y_A\,;\,z_B - z_A\right).$$

2. *Tích vô hướng và tích vectơ.* Cho $\vec{u} = (x\,;\,y\,;\,z)$ và $\vec{v} = (x'\,;\,y'\,;\,z')$.

+ Tích vô hướng của $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là số : $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

+ Tích có hướng của $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là vectơ

$$\left[\vec{u}, \vec{v}\right] = \left(\begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}\,;\,\begin{vmatrix} z & x \\ z' & x' \end{vmatrix}\,;\,\begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}\right).$$

Vectơ $\left[\vec{u}, \vec{v}\right]$ vuông góc với cả $\vec{u}$ và $\vec{v}$.

+ Một số tính chất : $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$;

$\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương $\Leftrightarrow \left[\vec{u}, \vec{v}\right] = \vec{0}$;

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow \left[\vec{u}, \vec{v}\right].\vec{w} = 0$.

+ Diện tích hình bình hành : $S_{ABCD} = \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right]\right|$.

+ Thể tích hình hộp : $V_{ABCD.A'B'C'D'} = \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AA'}\right|$.

3. *Phương trình mặt cầu.* Phương trình có dạng

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0,$$

với điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 > d$, là phương trình mặt cầu có tâm $(-a\,;\,-b\,;\,-c)$ và có bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

4. *Phương trình mặt phẳng.* Phương trình

$$Ax + By + Cz + D = 0, \text{ với } A^2 + B^2 + C^2 > 0$$

là phương trình của mặt phẳng có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}(A\,;B\,;C)$.

Mặt phẳng đi qua điểm $(x_0\,;\,y_0\,;\,z_0)$ với vectơ pháp tuyến $(A\,;\,B\,;\,C)$ có phương trình :

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

5. *Phương trình đường thẳng*

Cho đường thẳng d đi qua điểm $M_0\left(x_0\,;y_0\,;z_0\right)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(a\,;b\,;c)$. Khi đó :

+ Phương trình tham số của d là

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct. \end{cases}$$

+ Phương trình chính tắc của d (khi $abc \neq 0$) là

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}.$$

6. *Vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng*

Nếu (α) có phương trình $Ax+By+Cz+D=0$ và (α') có phương trình $A'x+B'y+C'z+D'=0$ thì

+ (α) và (α') cắt nhau khi và chỉ khi $A:B:C \neq A':B':C'$;

+ (α) và (α') song song khi và chỉ khi $\dfrac{A}{A'}=\dfrac{B}{B'}=\dfrac{C}{C'}\neq\dfrac{D}{D'}$;

+ (α) và (α') trùng nhau khi và chỉ khi $\dfrac{A}{A'}=\dfrac{B}{B'}=\dfrac{C}{C'}=\dfrac{D}{D'}$;

+ (α) và (α') vuông góc với nhau khi và chỉ khi $AA'+BB'+CC'=0$.

7. *Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng*

Nếu đường thẳng d đi qua điểm M_0, có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ và đường thẳng d' đi qua điểm M_0', có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u'}$ thì :

+ d và d' trùng nhau $\Leftrightarrow \left[\vec{u},\,\overrightarrow{u'}\right]=\left[\vec{u},\,\overrightarrow{M_0M_0'}\right]=\vec{0}$

+ $d\,//\,d' \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\vec{u},\,\overrightarrow{u'}\right]=\vec{0}\\ \left[\vec{u},\,\overrightarrow{M_0M_0'}\right]\neq\vec{0}\end{cases}$

+ d và d' cắt nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\vec{u}, \vec{u'}\right] . \overrightarrow{M_0M_0'} = 0 \\ \left[\vec{u}, \vec{u'}\right] \neq \vec{0} \end{cases}$

+ d và d' chéo nhau $\Leftrightarrow \left[\vec{u}\ \vec{u'}\right] . \overrightarrow{M_0M_0'} \neq 0.$

8. *Khoảng cách*

+ Khoảng cách giữa hai điểm $A(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ và $B(x_B\,;\,y_B\,;\,z_B)$ là

$$AB = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2 + \left(z_B - z_A\right)^2}.$$

+ Khoảng cách từ điểm $M_0(x_0\,;\,y_0\,;\,z_0)$ đến mặt phẳng (α) có phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ là

$$d(M_0, (\alpha)) = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

+ Khoảng cách từ điểm M_1 đến đường thẳng Δ đi qua M_0 và có vectơ chỉ phương $\vec{u}$

$$d(M_1,\ \Delta) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{M_0M_1}, \vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}.$$

+ Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau Δ và Δ', trong đó Δ đi qua điểm M_0 và có vectơ chỉ phương $\vec{u}$, còn Δ' đi qua điểm M_0' và có vectơ chỉ phương $\vec{u'}$ là

$$d(\Delta, \Delta') = \frac{\left|\left[\vec{u}, \vec{u'}\right] . \overrightarrow{M_0M_0'}\right|}{\left|\left[\vec{u}, \vec{u'}\right]\right|}.$$

II - Câu hỏi tự kiểm tra

1. Cho biết toạ độ của hai điểm A, B, làm thế nào để tìm :

a) Toạ độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$;

b) Khoảng cách giữa hai điểm A và B ;

c) Toạ độ của trung điểm đoạn thẳng AB ?

2. Cho toạ độ bốn đỉnh của một hình tứ diện, làm thế nào để tìm :
   a) Toạ độ của trọng tâm tứ diện ;
   b) Toạ độ của tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ;
   c) Thể tích tứ diện ;
   d) Độ dài đường cao ứng với một mặt của tứ diện ?
3. Bằng phương pháp toạ độ, làm thế nào để chứng minh :
   a) Hai vectơ cùng phương ;
   b) Ba vectơ đồng phẳng ;
   c) Ba điểm thẳng hàng ;
   d) Bốn điểm không đồng phẳng ?
4. Trong mỗi trường hợp sau, hãy nêu cách viết phương trình mặt phẳng :
   a) Đi qua ba điểm không thẳng hàng ;
   b) Đi qua một điểm và vuông góc với một đường thẳng cho trước ;
   c) Đi qua một điểm và song song với hai đường thẳng chéo nhau cho trước ;
   d) Đi qua một đường thẳng và song song với một đường thẳng cho trước ;
   e) Đi qua một điểm và vuông góc với hai mặt phẳng cho trước ;
   g) Chứa hai đường thẳng song song hoặc cắt nhau ;
   h) Đi qua một đường thẳng và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.
5. Trong những trường hợp sau, làm thế nào để viết phương trình đường thẳng :
   a) Đi qua một điểm và có vectơ chỉ phương cho trước ;
   b) Đi qua hai điểm phân biệt cho trước ;
   c) Đi qua một điểm và vuông góc với một mặt phẳng cho trước ;
   d) Đi qua một điểm và song song với hai mặt phẳng cắt nhau cho trước ;
   e) Đi qua một điểm và cắt hai đường thẳng chéo nhau cho trước ;
   g) Là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau cho trước ?
6. Bằng phương pháp toạ độ, làm thế nào để xác định vị trí tương đối :
   a) Giữa hai mặt phẳng ;
   b) Giữa hai đường thẳng ?

7. Bằng phương pháp toạ độ, làm thế nào để tính khoảng cách :

a) Từ một điểm đến một mặt phẳng ;

b) Từ một điểm đến một đường thẳng ;

c) Giữa hai đường thẳng chéo nhau ;

d) Giữa hai đường thẳng song song ;

e) Giữa hai mặt phẳng song song ;

g) Giữa đường thẳng và mặt phẳng song song với đường thẳng đó ?

8. Trong các trường hợp sau, làm thế nào để xác định toạ độ của điểm :

a) Là hình chiếu của một điểm trên một mặt phẳng cho trước ;

b) Là hình chiếu của một điểm trên một đường thẳng cho trước ;

c) Đối xứng với một điểm cho trước qua một mặt phẳng cho trước ?

III - Bài tập

1. Cho bốn điểm $A(1 ; 6 ; 2)$, $B(4 ; 0 ; 6)$, $C(5 ; 0 ; 4)$, $D(5 ; 1 ; 3)$.

a) Chứng minh rằng bốn điểm đó không đồng phẳng.

b) Tính thể tích tứ diện $ABCD$.

c) Viết phương trình mp(BCD).

d) Viết phương trình mặt cầu tâm A tiếp xúc với mp(BCD). Tìm toạ độ tiếp điểm.

2. Cho hai điểm $A(1 ; -1 ; -2)$, $B(3 ; 1 ; 1)$ và mặt phẳng $(P) : x - 2y + 3z - 5 = 0$.

a) Tìm toạ độ điểm A' đối xứng với điểm A qua mp(P).

b) Tìm góc giữa đường thẳng AB và mp(P).

c) Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua A, B và vuông góc với mp(P).

d) Tìm toạ độ giao điểm I của đường thẳng AB và mp(P). Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong (P), đi qua I và vuông góc với AB.

3. Cho đường thẳng d và mp(P) có phương trình :

$$d : \begin{cases} x = \dfrac{2}{3} + t \\ y = -\dfrac{11}{3} + t \\ z = t \end{cases} \qquad (P) : x - 3y + z - 1 = 0.$$

a) Viết phương trình đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của d trên mp(P).

b) Viết phương trình đường thẳng d_1 là hình chiếu song song của d trên mp(P) theo phương Oz.

c) Viết phương trình đường thẳng đi qua gốc toạ độ O, cắt d và song song với mp(P).

4. Cho điểm $A(2 ; 3 ; 1)$ và hai đường thẳng :

$$d_1 : \begin{cases} x = -2 - t \\ y = 2 + t \\ z = 2t \end{cases} \quad \text{và} \quad d_2 : \frac{x+5}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{1}.$$

a) Viết phương trình mp(P) đi qua A và d_1.

b) Viết phương trình mp(Q) đi qua A và d_2.

c) Viết phương trình đường thẳng d đi qua A, cắt cả d_1 và d_2.

d) Tính khoảng cách từ A đến d_2.

5. Cho hai đường thẳng :

$$d : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-6}{3} \quad \text{và} \quad d' : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + t \\ z = 3 - t. \end{cases}$$

a) Chứng minh hai đường thẳng đó chéo nhau. Tìm góc giữa chúng.

b) Tìm khoảng cách giữa d và d'.

c) Viết phương trình đường vuông góc chung của d và d'.

d) Viết phương trình đường thẳng song song với Oz, cắt cả d và d'.

6. Cho hai đường thẳng :

$$d : \begin{cases} x = 7 + 3t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \quad \text{và} \quad d' : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4}.$$

a) Chứng minh rằng d và d' đồng phẳng. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa chúng.

b) Tính thể tích hình tứ diện giới hạn bởi mp(P) và ba mặt phẳng toạ độ.

c) Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện nói trên.

7. Cho hai đường thẳng :

$$d : \begin{cases} x = t \\ y = 3 \\ z = 6 + t \end{cases} \quad \text{và} \quad d' : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2 - t. \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng d và d' chéo nhau và vuông góc với nhau.

b) Viết phương trình mp(P) đi qua d và vuông góc với d', phương trình của mp(Q) đi qua d' và vuông góc với d.

c) Viết phương trình chính tắc của đường vuông góc chung của d và d'.

8. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) lần lượt có phương trình :

$$(P) : 2x - y + z + 2 = 0 \quad \text{và} \quad (Q) : x + y + 2z - 1 = 0.$$

a) Chứng minh rằng (P) và (Q) cắt nhau. Tìm góc giữa hai mặt phẳng đó.

b) Viết phương trình đường thẳng d đi qua $A(1 ; 2 ; -3)$, song song với cả (P) và (Q).

c) Viết phương trình mp(R) đi qua $B(-1 ; 3 ; 4)$, vuông góc với cả (P) và (Q).

9. Cho mặt cầu (S) có phương trình : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0$.

a) Tìm toạ độ tâm mặt cầu và tính bán kính mặt cầu.

b) Tuỳ theo giá trị của k, hãy xét vị trí tương đối của mặt cầu (S) và mp(P) với

$$(P) : x + y - z + k = 0.$$

c) Mặt cầu cắt ba trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại ba điểm A, B, C khác với gốc toạ độ O. Viết phương trình mp(ABC).

d) Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm B.

e) Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) và song song với mặt phẳng (Q) có phương trình $4x + 3y - 12z - 1 = 0$.

10. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1. Trên các tia AA', AB, AD (có chung gốc A) lần lượt lấy các điểm M, N, P khác A sao cho $AM = m$, $AN = n$ và $AP = p$.

a) Tìm sự liên hệ giữa m, n và p sao cho mp(MNP) đi qua đỉnh C' của hình lập phương.

b) Trong trường hợp mp(MNP) luôn đi qua C', hãy tìm thể tích bé nhất của tứ diện $AMNP$. Khi đó tứ diện $AMNP$ có tính chất gì ?

IV - Câu hỏi trắc nghiệm

1. Cho ba điểm $M(2\,;0\,;0)$, $N(0\,;-3\,;0)$, $P(0\,;0\,;4)$. Nếu $MNPQ$ là hình bình hành thì toạ độ của điểm Q là :

(A) $(-2\,;-3\,;4)$; (B) $(3\,;4\,;2)$;

(C) $(2\,;3\,;4)$; (D) $(-2\,;-3;-4)$.

2. Cho ba điểm $A(1\,;2\,;0)$, $B(1\,;0\,;-1)$, $C(0\,;-1\,;2)$. Tam giác ABC là

(A) Tam giác cân đỉnh A ; (B) Tam giác vuông đỉnh A ;

(C) Tam giác đều ; (D) Không phải như (A), (B), (C).

3. Cho tam giác ABC có $A=(1;0;1)$, $B=(0;2;3)$, $C=(2;1;0)$. Độ dài đường cao tam giác kẻ từ C là

(A) $\sqrt{26}$; (B) $\frac{\sqrt{26}}{2}$;

(C) $\frac{\sqrt{26}}{3}$; (D) 26.

4. Ba đỉnh của một hình bình hành có tọa độ là $(1\,;1\,;1)$,$(2\,;3\,;4)$,$(6\,;5\,;2)$. Diện tích của hình bình hành đó bằng

(A) $2\sqrt{83}$; (B) $\sqrt{83}$;

(C) 83 ; (D) $\frac{\sqrt{83}}{2}$.

5. Cho $A(1\,;0\,;0)$, $B(0\,;1\,;0)$, $C(0\,;0\,;1)$ và $D(-2\,;1\,;-1)$. Thể tích của tứ diện $ABCD$ là

(A) 1 ; (B) 2 ;

(C) $\frac{1}{3}$; (D) $\frac{1}{2}$.

6. Cho $A(-1\,;-2\,;4)$, $B(-4\,;-2\,;0)$, $C(3\,;-2\,;1)$ và $D(1\,;1\,;1)$. Độ dài đường cao của tứ diện $ABCD$ kẻ từ đỉnh D là

(A) 3 ; (B) 1 ;

(C) 2 ; (D) $\frac{1}{2}$.

7. Cho bốn điểm $A(1;1;1)$, $B(1;2;1)$, $C(1;1;2)$ và $D(2;2;1)$. Tâm I của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ có toạ độ :

(A) $\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$;   (B) $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$;

(C) $(3;3;3)$;   (D) $(3;-3;3)$.

8. Bán kính của mặt cầu tâm $I(3;3;-4)$ tiếp xúc với trục Oy bằng

(A) 5 ;   (B) 4 ;

(C) $\sqrt{5}$;   (D) $\frac{5}{2}$.

9. Mặt cầu tâm $I(2;1;-1)$ tiếp xúc với mặt phẳng toạ độ (Oyz) có phương trình là

(A) $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=4$;

(B) $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=1$;

(C) $(x+2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=4$;

(D) $(x+2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=2$.

10. Cho ba điểm $A(1;1;3)$, $B(-1;3;2)$ và $C(-1;2;3)$. Mặt phẳng (ABC) có phương trình là

(A) $x+2y+2z-3=0$;   (B) $x-2y+3z-3=0$;

(C) $x+2y+2z-9=0$;   (D) $x^2+2y+2z+9=0$.

11. Cho ba điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$ và $C(0;0;3)$. Phương trình nào sau đây **không phải** là phương trình mặt phẳng (ABC) :

(A) $x+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$;   (B) $6x+3y+2z-6=0$;

(C) $6x+3y+2z+6=0$;   (D) $12x+6y+4z-12=0$.

12. Cho hai điểm $A(1\,;3\,;-4)$ và $B(-1\,;2\,;2)$. Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB là

(A) $4x+2y-12z-17=0$; (B) $4x+2y+12z-17=0$;

(C) $4x-2y-12z-17=0$; (D) $4x-2y+12z+17=0$.

13. Cho $A(a\,;0\,;0)$, $B(0\,;b\,;0)$, $C(0\,;0\,;c)$, a, b, c là những số dương thay đổi sao cho $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=2$. Mặt phẳng (ABC) luôn đi qua một điểm cố định có toạ độ là

(A) $(1\,;1\,;1)$; (B) $(2\,;2\,;2)$;

(C) $\left(\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{2}\right)$; (D) $\left(-\dfrac{1}{2}\,;-\dfrac{1}{2}\,;-\dfrac{1}{2}\right)$.

14. Cho điểm $A(-1\,;2\,;1)$ và hai mặt phẳng $(P): 2x+4y-6z-5=0$ và $(Q): x+2y-3z=0$. Mệnh đề nào sau đây là đúng ?

(A) mp(Q) đi qua A và song song với (P) ;

(B) mp(Q) không đi qua A và song song với (P) ;

(C) mp(Q) đi qua A và không song song với (P) ;

(D) mp(Q) không đi qua A và không song song với (P).

15. Cho điểm $A(1\,;2\,;-5)$. Gọi M, N, P là hình chiếu của A trên ba trục Ox, Oy, Oz. Phương trình mặt phẳng (MNP) là

(A) $x+\dfrac{y}{2}-\dfrac{z}{5}=1$; (B) $x+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{5}=1$;

(C) $x+\dfrac{y}{2}-\dfrac{z}{5}=0$; (D) $x+\dfrac{y}{2}-\dfrac{z}{5}+1=0$.

16. Cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2(x+y+z)-22=0$ và mặt phẳng $(P): 3x-2y+6z+14=0$. Khoảng cách từ tâm I của mặt cầu (S) tới mặt phẳng (P) là :

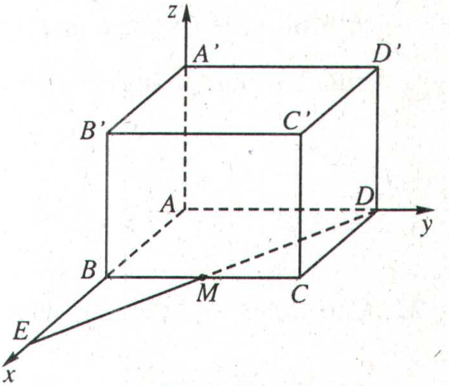
(A) 1 ; (B) 2 ; (C) 3 ; (D) 4.

17. Mặt phẳng (P) cắt ba trục Ox, Oy, Oz tại A, B, C ; trọng tâm tam giác ABC là $G(-1\,;-3\,;2)$. Phương trình mặt phẳng (P) là

(A) $x + y - z - 5 = 0$; (B) $2x - 3y - z - 1 = 0$;

(C) $x + 3y - 2z + 1 = 0$; (D) $6x + 2y - 3z + 18 = 0$.

18. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Tính khoảng cách từ A tới mặt phẳng $(A'MD)$.



Hình 69

Một học sinh giải như sau :

Bước 1. Chọn hệ trục toạ độ như hình 69. Kéo dài DM cắt AB tại E. Khi đó

$$A = (0\,;0\,;0),\ E = (2\,;0\,;0),$$

$$D = (0\,;1\,;0),\ A' = (0\,;0\,;1).$$

Bước 2. Viết phương trình mặt phẳng $(A'MD)$:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{1} + \frac{z}{1} = 1 \Leftrightarrow x + 2y + 2z - 2 = 0.$$

Bước 3. Khoảng cách $d(A, (A'MD)) = \dfrac{|-2|}{\sqrt{1+4+4}} = \dfrac{2}{3}$.

Bài giải trên đúng hay sai ? Nếu sai thì sai ở bước nào ?

(A) Đúng ; (B) Sai ở bước 1 ;

(C) Sai ở bước 2 ; (D) Sai ở bước 3.

19. Cho hai điểm $A(1\,;-1\,;5)$ và $B(0\,;0\,;1)$. Mặt phẳng (P) chứa A, B và song song với Oy có phương trình là

(A) $4x - z + 1 = 0$; (B) $4x + y - z + 1 = 0$;

(C) $2x + z - 5 = 0$; (D) $y + 4z - 1 = 0$.

20. Mặt phẳng (P) chứa trục Oz và điểm $A(2\,;-3\,;5)$ có phương trình là

(A) $2x+3y=0$;
(B) $2x-3y=0$;
(C) $3x+2y=0$;
(D) $3x-2y+z=0$.

21. Cho mặt phẳng (P) có phương trình $x-y-1=0$. Điểm $H(2\,;-1\,;-2)$ là hình chiếu vuông góc của gốc toạ độ O trên một mặt phẳng (Q). Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng

(A) 30° ;
(B) 45° ;
(C) 60° ;
(D) 90°.

22. Cho điểm $A(1\,;2\,;3)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x}{3}=\dfrac{y-1}{4}=z+3$. Phương trình mặt phẳng (A,d) là

(A) $23x+17y-z+14=0$;
(B) $23x-17y-z+14=0$;
(C) $23x+17y+z-60=0$;
(D) $23x-17y+z-14=0$.

23. Cho hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-3}{3}$ và $d_2:\begin{cases}x=2t\\ y=1+4t\\ z=2+6t.\end{cases}$

Khẳng định nào sau đây là đúng ?

(A) d_1,d_2 cắt nhau ;
(B) d_1,d_2 trùng nhau ;
(C) $d_1 // d_2$;
(D) d_1,d_2 chéo nhau.

24. Cho mặt phẳng $(\alpha): x+3y+z+1=0$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+t\\ y=2-t\\ z=2-3t.\end{cases}$

Toạ độ giao điểm A của d và (α) là

(A) $A(3\,;0\,;4)$;
(B) $A(3\,;-4\,;0)$;
(C) $A(-3\,;0\,;4)$;
(D) $A(3\,;0\,;-4)$.

25. Cho đường thẳng $d : \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t. \end{cases}$

Phương trình nào sau đây cũng là phương trình của đường thẳng d ?

(A) $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -t \\ z = 3 + t\ ; \end{cases}$ (B) $\begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = 4 - t\ ; \end{cases}$

(C) $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 4 + t\ ; \end{cases}$ (D) $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \\ z = 2 + t. \end{cases}$

26. Cho hai điểm $A(2\ ;3\ ;-1)$, $B(1\ ;2\ ;4)$ và ba phương trình sau :

(I) $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 - t \\ z = -1 + 5t\ ; \end{cases}$ (II) $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z+1}{-5}$; (III) $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - t \\ z = 4 + 5t. \end{cases}$

Mệnh đề nào sau đây là đúng ?

(A) Chỉ có (I) là phương trình của đường thẳng AB ;

(B) Chỉ có (III) là phương trình của đường thẳng AB ;

(C) Chỉ có (I) và (II) là phương trình của đường thẳng AB ;

(D) Cả (I), (II) và (III) đều là phương trình của đường thẳng AB.

27. Cho ba điểm $A(1\ ;3\ ;2), B(1\ ;2\ ;1), C(1\ ;1\ ;3)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua trọng tâm G của tam giác ABC và vuông góc với mp(ABC).

Một học sinh giải như sau :

Bước 1. Toạ độ trọng tâm của tam giác ABC là $\begin{cases} x_G = \dfrac{1+1+1}{3} = 1 \\ y_G = \dfrac{3+2+1}{3} = 2 \\ z_G = \dfrac{2+1+3}{3} = 2. \end{cases}$

Bước 2. Vectơ pháp tuyến của mp(ABC) là $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (-3\,;1\,;0)$.

Bước 3. Phương trình tham số của đường thẳng Δ là

$$\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2 + t \\ z = 2. \end{cases}$$

Bài giải trên đúng hay sai, nếu sai thì sai ở bước nào ?

(A) Đúng ;
(B) Sai ở bước 1 ;
(C) Sai ở bước 2 ;
(D) Sai ở bước 3.

28. Gọi d là đường thẳng đi qua gốc toạ độ O, vuông góc với trục Ox và vuông góc với đường thẳng $\Delta : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 - 3t. \end{cases}$

Phương trình của d là

(A) $\begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = -t\,; \end{cases}$
(B) $\begin{cases} x = 1 \\ y = -3t \\ z = -t\,; \end{cases}$

(C) $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{-1}$;
(D) $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t. \end{cases}$

29. Cho đường thẳng $d : \begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = -1 - t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$ và mặt phẳng $(P) : x + 2y - z + 3 = 0$.

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

(A) d song song với (P) ;
(B) d cắt (P) ;
(C) d vuông góc với (P) ;
(D) d nằm trên (P).

30. Cho điểm $A(1\,;1\,;1)$ và đường thẳng $\begin{cases} x = 6 - 4t \\ y = -2 - t \\ z = -1 + 2t. \end{cases}$

Hình chiếu của A trên d có toạ độ là

(A) $(2\,;-3\,;1)$; (B) $(2\,;-3\,;-1)$;

(C) $(2\,;3\,;1)$; (D) $(-2\,;3\,;1)$.

31. Cho tứ diện $ABCD$ có $A(1\,;0\,;0)$, $B(1\,;1\,;0)$, $C(0\,;1\,;0)$ và $D(0\,;0\,;2)$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BD.

Một học sinh giải như sau :

Bước 1. $\overrightarrow{AC} = (-1\,;1\,;0)$, $\overrightarrow{BD} = (-1\,;-1\,;2)$, $\overrightarrow{AB} = (0\,;1\,;0)$.

Bước 2. $\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}\right] = (2\,;2\,;2)$.

Bước 3. $d(AC,BD) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}\right].\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}\right]\right|} = \dfrac{2}{\sqrt{12}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Bài giải trên đúng hay sai, nếu sai thì sai ở bước nào ?

(A) Đúng ; (B) Sai ở bước 1 ;

(C) Sai ở bước 2 ; (D) Sai ở bước 3.

32. Cho $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 1$, $(\vec{u},\vec{v}) = \dfrac{\pi}{3}$. Góc giữa vectơ $\vec{v}$ và vectơ $\vec{u} - \vec{v}$ bằng

(A) 30° ; (B) 45° ;

(C) 60° ; (D) 90°.

33. Cho $|\vec{u}| = 2, |\vec{v}| = 5, (\vec{u},\vec{v}) = \dfrac{\pi}{6}$. Độ dài vectơ $[\vec{u},\vec{v}]$ bằng

(A) 10 ; (B) 5 ;

(C) 8 ; (D) $5\sqrt{3}$.

34. Mặt phẳng $2x - 3y + z - 1 = 0$ cắt các trục toạ độ tại các điểm :

(A) $\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right), \left(0; -\frac{1}{3}; 0\right), (0; 0; 1)$;

(B) $(1; 0; 0), \left(0; \frac{1}{3}; 0\right), (0; 0; 1)$;

(C) $\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right), \left(0; \frac{1}{3}; 0\right), (0; 0; 1)$;

(D) $\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right), \left(0; -\frac{1}{3}; 0\right), (0; 0; -1)$.

35. Cho đường thẳng $d : \begin{cases} x = -\frac{9}{5} - t \\ y = 5t \\ z = \frac{7}{5} + 3t \end{cases}$

và mặt phẳng $(P) : 3x - 2y + 3z - 1 = 0$. Gọi d' là hình chiếu của d trên (P). Trong các vectơ sau, vectơ nào **không phải** là vectơ chỉ phương của d' ?

(A) $(5; -51; -39)$;

(B) $(10; -102; -78)$;

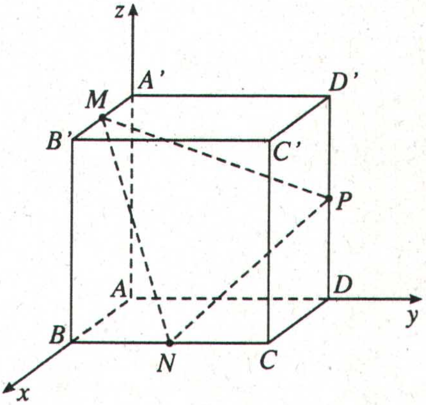
(C) $(-5; 51; 39)$;

(D) $(5; 51; 39)$.

36. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng 1. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của $A'B'$, BC, DD'. Chứng minh rằng $AC' \perp (MNP)$.

Một học sinh giải như sau :

Bước 1. Chọn hệ trục toạ độ như ở hình 70.



Hình 70

Khi đó $A = (0; 0; 0), C' = (1; 1; 1)$,

$M = \left(\frac{1}{2}; 0; 1\right),\ N = \left(1; \frac{1}{2}; 0\right), P = \left(0; 1; \frac{1}{2}\right)$.

Bước 2. Tính $\overrightarrow{AC'} = (1\,;1\,;1)$, $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;-1\right)$, $\overrightarrow{MP} = \left(-\frac{1}{2}\,;1\,;-\frac{1}{2}\right)$.

Bước 3. $\begin{cases} \overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{MN} = 0 \\ \overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{MP} = 0 \end{cases} \Rightarrow AC' \perp \text{mp}(MNP)$.

Bài giải trên đúng hay sai, nếu sai thì sai ở bước nào ?

(A) Đúng ; (B) Sai ở bước 1 ;

(C) Sai ở bước 2 ; (D) Sai ở bước 3.

37. Cho đường thẳng $d : \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 2 - t. \end{cases}$

Phương trình đường vuông góc chung của d và trục Ox là

(A) $\begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = t\,; \end{cases}$ (B) $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2t \\ z = t\,; \end{cases}$

(C) $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 - t \\ z = t\,; \end{cases}$ (D) $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t. \end{cases}$

38. Cho mặt phẳng $(P) : x - 2y - 3z + 14 = 0$ và điểm $M(1\,;-1\,;1)$. Toạ độ của điểm M' đối xứng với M qua mp(P) là

(A) $(-1\,;3\,;7)$; (B) $(1\,;-3\,;7)$;

(C) $(2\,;-3\,;-2)$; (D) $(2\,;-1\,;1)$.

39. Cho điểm $A(0\,;-1\,;3)$ và đường thẳng $d : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 \\ z = -t. \end{cases}$

Khoảng cách từ A đến d bằng

(A) $\sqrt{3}$;
(B) $\sqrt{14}$;
(C) $\sqrt{6}$;
(D) $\sqrt{8}$.

40. Cho điểm $M(-1\,;2\,;-3)$. Gọi M_1, M_2, M_3 lần lượt là điểm đối xứng của M qua các mặt phẳng $(Oxy),(Oxz),(Oyz)$. Phương trình mp$(M_1M_2M_3)$ là

(A) $6x+2y+3z+6=0$;
(B) $6x-2y+3z+6=0$;
(C) $6x-3y+2z+6=0$;
(D) $6x-3y-2z+6=0$.

41. Cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=49$. Phương trình nào sau đây là phương trình của mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) ?

(A) $6x+2y+3z=0$;
(B) $2x+3y+6z-5=0$;
(C) $6x+2y+3z-55=0$;
(D) $x+2y+2z-7=0$.

42. Cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z=0$. Trong ba điểm (0 ; 0 ; 0), (1 ; 2 ; 3), (2 ; –1 ; –1), có bao nhiêu điểm nằm trong mặt cầu (S) ?

(A) 0 ;
(B) 1 ;
(C) 2 ;
(D) 3.

ÔN TẬP CUỐI NĂM

I - Bài tập tự luận

1. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, với cạnh bên không vuông góc với mặt đáy. Gọi (α) là mặt phẳng vuông góc với các cạnh bên của hình lăng trụ và cắt chúng tại P, Q, R. Phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AA'}$ biến tam giác PQR thành tam giác $P'Q'R'$.

a) Chứng minh rằng thể tích V của hình lăng trụ đã cho bằng thể tích của hình lăng trụ $PQR.P'Q'R'$.

b) Chứng minh rằng $V = S_{PQR}.AA'$, trong đó S_{PQR} là diện tích tam giác PQR.

2. Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích V. Hãy tính thể tích của hình tứ diện có đỉnh là trọng tâm các mặt của tứ diện đã cho.

3. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích V. Hãy tính thể tích của tứ diện $ACB'D'$.

4. Chứng minh rằng 6 trung điểm các cạnh của một hình tứ diện đều đã cho là các đỉnh của một hình tám mặt đều. Hãy so sánh thể tích của tứ diện đều đã cho và thể tích của hình tám mặt đều đó.

5. Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn $(O\,;R)$. Gọi $\mathscr{H}$ là hình gồm các điểm của hình tròn $(O\,;R)$ nhưng không nằm trong hình vuông. Tính thể tích hình tròn xoay sinh bởi hình $\mathscr{H}$ khi quay quanh một đường chéo của hình vuông.

6. Cho lục giác đều $ABCDEF$ cạnh a.

a) Tính thể tích khối tròn xoay sinh bởi lục giác đó khi quay quanh đường thẳng AD.

b) Tính thể tích hình tròn xoay sinh bởi lục giác đó khi quay quanh đường trung trực của đoạn thẳng AB.

7. Cho hình trụ có bán kính R và đường cao $R\sqrt{2}$. Gọi AB và CD là hai đường kính thay đổi của hai đường tròn đáy mà AB vuông góc với CD.

a) Chứng minh rằng $ABCD$ là tứ diện đều.

b) Chứng minh rằng các đường thẳng AC, AD, BC, BD luôn tiếp xúc với một mặt trụ cố định (tức là khoảng cách từ các đường thẳng đó tới trục của mặt trụ bằng bán kính mặt trụ).

8. Trong không gian toạ độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1\ ;\ 5\ ;\ 3)$, $B(4\ ;\ 2\ ;\ -5)$, $C(5\ ;\ 5\ ;\ -1)$ và $D(1\ ;\ 2\ ;\ 4)$.

a) Chứng tỏ rằng bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng.

b) Viết phương trình mặt cầu (S) đi qua bốn điểm A, B, C, D. Xác định tâm và tính bán kính của mặt cầu đó.

c) Viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C và tìm khoảng cách từ điểm D tới mặt phẳng đó.

d) Viết phương trình mặt phẳng vuông góc với CD và tiếp xúc với mặt cầu (S).

e) Tìm bán kính các đường tròn giao tuyến của mặt cầu (S) và các mặt phẳng toạ độ.

9. Trong không gian toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ có phương trình :

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}.$$

a) Viết phương trình hình chiếu của Δ trên các mặt phẳng toạ độ.

b) Chứng minh rằng mặt phẳng $x + 5y + z + 4 = 0$ đi qua đường thẳng Δ.

c) Tính khoảng cách giữa đường thẳng Δ và các trục toạ độ.

d) Viết phương trình đường vuông góc chung của Δ và đường thẳng

$$\Delta' : x = y = z.$$

e) Viết phương trình đường thẳng song song với Oz, cắt cả Δ và Δ'.

10. Trong không gian toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1\ ;\ -1\ ;\ 2)$, $B(2\ ;\ 0\ ;\ 1)$.

a) Tìm quỹ tích các điểm M sao cho $MA^2 - MB^2 = 2$.

b) Tìm quỹ tích các điểm N sao cho $NA^2 + NB^2 = 3$.

c) Tìm quỹ tích các điểm cách đều hai mặt phẳng (OAB) và (Oxy).

11. Trong không gian toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ có phương trình

$$\begin{cases} x = 1 + at \\ y = 1 + bt \\ z = 5 + ct \end{cases}$$

trong đó a,b,c thay đổi sao cho $c^2 = a^2 + b^2$.

a) Chứng minh đường thẳng Δ đi qua một điểm cố định, góc giữa Δ và Oz là không đổi.

b) Tìm quỹ tích giao điểm của Δ và mp(Oxy).

12. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ với $AB = a$, $BC = b$, $CC' = c$.

a) Tính khoảng cách từ điểm A tới mp$(A'BD)$.

b) Tính khoảng cách từ điểm A' tới đường thẳng $C'D$.

c) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BC' và CD'.

II - Câu hỏi trắc nghiệm

1. Cho $\mathscr{H}$ là hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Xét các mặt phẳng : (SAC), (SAB), (SBD), (ABC), (SOI), trong đó I là trung điểm của AB, O là tâm hình vuông $ABCD$. Trong các mặt phẳng đó, có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng của $\mathscr{H}$?

(A) 1 ; (B) 2 ; (C) 3 ; (D) 4.

2. Gọi $\mathscr{H}$ là lăng trụ lục giác đều $ABCDEF.A'B'C'D'E'F'$. Xét các mặt phẳng : mp$(AA'D)$, mp(ACA'), mặt phẳng trung trực của DD', mp(ABB'), mặt phẳng trung trực của AB. Trong các mặt phẳng đó, có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng của $\mathscr{H}$?

(A) 1 ; (B) 2 ; (C) 3 ; (D) 4.

3. Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$, M là trung điểm của cạnh AB. Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào **sai** ?

(A) $V_{A'B'C'C} = V_{MA'B'C'}$;

(B) $V_{ABCC'} = V_{A'BCC'}$;

(C) $V_{MA'B'C'} = V_{A'ABC}$;

(D) $V_{MA'B'C'} = \frac{1}{2}V_{AA'B'C'}$.

4. Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào **sai** ?

(A) $V_{A'BCC'} = \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}$;

(B) $V_{A.BB'C'C} = \frac{1}{2}V_{ABC.A'B'C'}$;

(C) $V_{A'.BCC'B'} = 2V_{AA'BC}$;

(D) $V_{C.ABB'A'} = V_{C'.ABB'A'}$.

5. Cho khối chóp tứ giác $S.ABCD$ và các điểm A', B', C', D' lần lượt nằm trên các đường thẳng SA, SB, SC, SD nhưng không trùng với S.

Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng ?

(A) $\dfrac{V_{S.ABC}}{V_{S.A'B'C'}} = \dfrac{SA}{SA'}.\dfrac{SB}{SB'}.\dfrac{SC}{SC'}$;

(B) $\dfrac{V_{S.ABCD}}{V_{S.A'B'C'D'}} = \dfrac{SA}{SA'}.\dfrac{SB}{SB'}.\dfrac{SC}{SC'}.\dfrac{SD}{SD'}$;

(C) $\dfrac{V_{S.ABCD}}{V_{S.A'B'C'D'}} = \dfrac{SA}{SA'}\cdot\dfrac{SC}{SC'} + \dfrac{SB}{SB'}\cdot\dfrac{SD}{SD'}$;

(D) $\dfrac{V_{S.ABCD}}{V_{S.A'B'C'D'}} = \dfrac{SA}{SA'} + \dfrac{SB}{SB'} + \dfrac{SC}{SC'} + \dfrac{SD}{SD'}$.

6. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

(A) Hình lăng trụ nội tiếp được một mặt cầu nếu đáy là đa giác nội tiếp.

(B) Hình lăng trụ nội tiếp được một mặt cầu nếu tất cả các mặt đều là đa giác nội tiếp.

(C) Hình lăng trụ nội tiếp được một mặt cầu nếu có mặt bên vuông góc với mặt đáy.

(D) Đa diện nội tiếp được một mặt cầu nếu các mặt đều là đa giác nội tiếp.

7. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

(A) Đường tròn đi qua ba điểm phân biệt nằm trên mặt cầu thì nằm hoàn toàn trên mặt cầu.

(B) Có duy nhất một mặt cầu đi qua 4 đỉnh của một hình thang cân cho trước.

(C) Hình chóp có đáy là hình thang vuông luôn luôn nội tiếp một mặt cầu.

(D) Cả ba mệnh đề trên đều đúng.

8. Cho khối trụ có bán kính $a\sqrt{3}$ và chiều cao $2a\sqrt{3}$. Thể tích của nó là

(A) $4\pi a^3\sqrt{2}$; (B) $9a^3\sqrt{3}$;

(C) $6\pi a^3\sqrt{3}$; (D) $6\pi a^2\sqrt{3}$.

9. Đáy hình chóp là hình vuông diện tích bằng 4. Các mặt bên là những tam giác đều. Diện tích toàn phần của hình chóp là

(A) $4 + 4\sqrt{3}$; (B) 8 ;

(C) 16 ; (D) $4 + 4\sqrt{2}$.

10. Một hình nón có đường sinh bằng l và bằng đường kính đáy. Bán kính hình cầu nội tiếp hình nón là

(A) $\frac{1}{3}l$; (B) $\frac{\sqrt{3}}{6}l$;

(C) $\frac{\sqrt{2}}{6}l$; (D) $\frac{3}{4}l$.

11. Một hình cầu có thể tích $\frac{4\pi}{3}$ nội tiếp một hình lập phương. Thể tích của hình lập phương đó bằng

(A) 8 ; (B) 4π ; (C) 1 ; (D) $2\pi\sqrt{3}$.

12. Cho hình chữ nhật có hai đỉnh $A(-2 ; 3 ; 0)$, $B(2 ; 3 ; 0)$ và một cạnh nằm trên trục Ox. Khối tròn xoay sinh bởi hình chữ nhật đó khi quay quanh trục Oy có thể tích là

(A) $6\pi^2$; (B) 12 ; (C) 12π ; (D) $\frac{4\pi}{3}$.

13. Cho vectơ $\vec{u}(1 ; 0 ; 2)$ và $\vec{v}(0 ; -1 ; 1)$. Trong các vectơ sau, vectơ nào cùng phương với $[\vec{u}, \vec{v}]$?

(A) $\vec{a}(1 ; 1 ; 1)$; (B) $\vec{b}(-2 ; 1 ; 1)$;

(C) $\vec{c}(0 ; 1 ; -1)$; (D) $\vec{d}(2 ; 2 ; -1)$?

14. Cho tam giác ABC có diện tích bằng 6 nằm trong mặt phẳng (α) có phương trình $2x - 2y + z + 5 = 0$. Thể tích hình chóp $S.ABC$ với $S = (1 ; 1 ; 1)$ bằng

(A) $3\sqrt{6}$; (B) $12\sqrt{2}$;

(C) 8 ; (D) 4.

15. Mặt cầu tâm $I(6 ; 3 ; -4)$, tiếp xúc với trục Ox có bán kính là

(A) 5 ; (B) $2\sqrt{3}$;

(C) $4\sqrt{3}$; (D) 4.

16. Cho đường thẳng d có phương trình $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + t. \end{cases}$

Phương trình tham số nào sau đây cũng là phương trình của d ?

(A) $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + t \end{cases}$; (B) $\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 1 - 2t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$;

(C) $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t \end{cases}$; (D) $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - t. \end{cases}$

17. Cho hai đường thẳng $d : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - t \end{cases}$ và $d' : \begin{cases} x = 1 + 2t' \\ y = -1 + 2t' \\ z = 2 - 2t' \end{cases}$. Khi đó :

(A) d cắt d' ; (B) d trùng d' ;

(C) d và d' chéo nhau ; (D) d song song với d'.

18. Cho mặt phẳng $(P) : 3x + 4z + 12 = 0$ và mặt cầu

$$(S) : x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 1.$$

Khi đó :

(A) mp(P) đi qua tâm mặt cầu (S) ;

(B) mp(P) tiếp xúc với mặt cầu (S) ;

(C) mp(P) cắt (S) theo một đường tròn ;

(D) mp(P) không cắt (S).

19. Toạ độ hình chiếu vuông góc của điểm $M(2\,;0\,;1)$ trên đường thẳng

$$\Delta : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$$

là

(A) $(1\,;0\,;2)$; (B) $(2\,;2\,;3)$; (C) $(0\,;-2\,;1)$; (D) $(-1\,;4\,;0)$.

20. Cho hai đường thẳng $d : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 1 \end{cases}$ và $d' : \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-3}{1}$.

Khoảng cách giữa d và d' là

(A) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$; (B) $\dfrac{\sqrt{14}}{2}$;

(C) $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$; (D) $\sqrt{2}$.

21. Cho hai đường thẳng $d : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 0 \\ z = -5 + t \end{cases}$ và $d' : \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 - 2t' \\ z = 5 + 3t'. \end{cases}$

Phương trình đường vuông góc chung của d và d' là

(A) $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 3t \\ z = -2 + 2t; \end{cases}$ (B) $\begin{cases} x = 4 - t \\ y = 3t \\ z = -2 + t; \end{cases}$

(C) $\dfrac{x-4}{-2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-2}{2}$; (D) $\dfrac{x-4}{-2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+2}{2}$.

22. Cho mặt phẳng $(P) : mx + y + (n-2)z + m + 2 = 0$. Với mọi m, n, mặt phẳng (P) đi qua điểm cố định :

(A) $(1\,;2\,;0)$; (B) $(2\,;1\,;0)$;

(C) $(0\,;1\,;-2)$; (D) $(-1\,;-2\,;0)$.

23. Cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4z = 0$. Mặt phẳng tiếp xúc với (S) tại điểm $A(3 ; 4 ; 3)$ có phương trình :

(A) $4x + 4y - 2z - 17 = 0$; (B) $2x + 2y + z - 17 = 0$;

(C) $2x + 4y + z - 17 = 0$; (D) $x + y + z - 17 = 0$.

III - Một số đề kiểm tra

ĐỀ I

Câu 1. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, và cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$.

a) Tính thể tích của hình chóp đã cho.

b) Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

c) Gọi A' và C' lần lượt là trung điểm của hai cạnh SA và SC. Chứng minh rằng hai hình chóp $A'.ABCD$ và $C'.CBAD$ bằng nhau.

Câu 2. Trong không gian toạ độ $Oxyz$, cho các điểm $A(4 ; -1 ; 2)$, $B(1 ; 2 ; 2)$ và $C(1 ; -1 ; 5)$.

a) Chứng minh rằng ABC là tam giác đều.

b) Viết phương trình mp(ABC). Tính thể tích khối tứ diện giới hạn bởi mp(ABC) và các mặt phẳng toạ độ.

c) Viết phương trình trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

d) Tìm toạ độ điểm D sao cho $ABCD$ là tứ diện đều.

ĐỀ II

Câu 1. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi B', C', D' lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC và AD.

a) Chứng minh rằng 6 điểm B, C, D, B', C', D' nằm trên một mặt cầu. Tính bán kính mặt cầu đó.

b) Tính thể tích khối chóp $D.BCC'B'$.

Câu 2. Trong không gian toạ độ $Oxyz$ cho các điểm $A(2\,;0\,;0)$, $A'(6\,;0\,;0)$, $B(0\,;3\,;0)$, $B'(0\,;4\,;0)$, $C(0\,;0\,;4)$, $C'(0\,;0\,;3)$.

a) Viết phương trình mặt cầu đi qua bốn điểm A, A', B, C. Chứng minh rằng B' và C' cũng nằm trên mặt cầu đó.

b) Chứng minh rằng trực tâm H của tam giác ABC, trọng tâm G của tam giác $A'B'C'$ cùng nằm trên một đường thẳng đi qua O. Viết phương trình đường thẳng đó.

c) Tính khoảng cách từ điểm O tới giao tuyến của mp(ABC') và mp$(A'B'C)$.

ĐỀ III

Câu 1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi N là điểm nằm trên cạnh AB, và (α) là mặt phẳng đi qua ba điểm D, N, B'.

a) Mặt phẳng (α) cắt hình hộp đã cho theo thiết diện là hình gì ?

b) Chứng minh rằng mặt phẳng (α) phân chia khối hộp đã cho thành hai khối đa diện $\mathscr{H}_1$ và $\mathscr{H}_2$ bằng nhau.

c) Tính tỉ số thể tích của khối đa diện $\mathscr{H}_1$ và thể tích khối tứ diện $AA'BD$.

Câu 2. Trong không gian toạ độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1\,;-3\,;-1)$ và $B(-2\,;1\,;3)$.

a) Chứng tỏ rằng hai điểm A và B cách đều trục Ox.

b) Tìm điểm C nằm trên trục Oz sao cho tam giác ABC vuông tại C.

c) Viết phương trình hình chiếu của đường thẳng AB trên mp(Oyz).

d) Viết phương trình mặt cầu đi qua ba điểm O, A, B và có tâm nằm trên mp(Oxy).

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

Chương I

1. Gọi số cạnh và số mặt của khối đa diện lần lượt là C và M. Hãy chứng minh rằng $3M = 2C$.

2. Gọi số cạnh và số đỉnh của khối đa diện lần lượt là C và $Đ$. Hãy chứng minh rằng $3Đ = 2C$.

3. Gọi A là một đỉnh của khối đa diện. A là đỉnh chung cho ba cạnh AB, AC, AD. Mặt chứa cạnh AB, AC phải là tam giác ABC. Tương tự các tam giác ACD, ADB đều là mặt của khối đa diện, suy ra mặt thứ tư là tam giác BCD. Từ đó suy ra kết quả bài toán.

4. Khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ được phân chia thành năm khối tứ diện :

$ABDA'$, $CBDC'$, $B'A'C'B$, $D'A'C'D$, $BDA'C'$.

5. Lấy điểm M nằm giữa A và B ; N nằm giữa C và D. Bằng hai mặt phẳng (MCD) và (NAB), khối tứ diện $ABCD$ được phân chia thành bốn khối tứ diện.

6. a) $a \subset (P)$ hoặc $a \perp (P)$.

b) $a \,//\, (P)$.

c) a cắt (P) nhưng không vuông góc với (P).

d) Không có trường hợp nào.

7. a) Các mặt phẳng đối xứng của hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$: (SAC), (SBD), các mặt phẳng trung trực của các cạnh AB và BC.

b) Gọi M, N, O lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CA và S là giao điểm của các cạnh AA', BB', CC' của hình chóp cụt tam giác đều $ABC.A'B'C'$ thì các mặt phẳng đối xứng của hình chóp cụt là : (SAN), (SBO), (SCM).

c) Có ba mặt phẳng đối xứng là ba mặt phẳng trung trực của ba cạnh xuất phát từ một đỉnh của hình hộp chữ nhật.

8. a) Lấy liên tiếp hai phép đối xứng qua mặt phẳng trung trực của cạnh AA' và mặt phẳng $(BDD'B')$ hoặc sử dụng phép đối xứng qua tâm của hình lập phương.

b) Lấy phép đối xứng qua mặt phẳng $(ADC'B')$.

9. Nếu phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ biến hai điểm M, N lần lượt thành M', N' thì $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'} = \vec{v}$, do đó $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$, suy ra $MN = M'N'$.

Nếu phép đối xứng qua đường thẳng d biến hai điểm M, N lần lượt thành M', N' thì $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{M'N'} = 2\overrightarrow{HK}$ (H và K lần lượt là trung điểm của MM' và NN') và $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{N'N} + \overrightarrow{MM'}$. Từ đó hãy chứng minh

$$\left(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{M'N'}\right)\left(\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{M'N'}\right) = 0.$$

Nếu phép đối xứng qua điểm O biến hai điểm M, N lần lượt thành M', N' thì $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{ON'} = \vec{0}$ nên $\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{M'N'}$, suy ra $MN = M'N'$.

10. a) Lấy hai điểm I, J lần lượt nằm trên (P) và (Q) sao cho $IJ \perp (P)$. Khi đó, thực hiện liên tiếp hai phép đối xứng qua hai mặt phẳng song song (P) và (Q) thì kết quả là phép tịnh tiến theo vectơ $2\overrightarrow{IJ}$.

b) Kết quả là phép đối xứng qua đường thẳng giao tuyến của (P) và (Q).

11. Dùng định nghĩa, tính chất của phép vị tự và tính chất của hai mặt phẳng song song.

12. a) Dùng phép vị tự có tâm là trọng tâm của tứ diện đã cho và tỉ số vị tự $k = -\dfrac{1}{3}$.

b) Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD, AC, BD, AD, BC của khối tứ diện. Hãy chứng minh 8 tam giác MPR, MRQ, MQS, MSP, NPR, NRQ, NQS, NSP là những tam giác đều.

13. Giả sử $SABCDS'$ là khối tám mặt đều. Hãy dùng tính chất : "Nếu các điểm cách đều hai điểm cho trước thì chúng nằm trên mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng nối hai điểm đó" và tính chất "Nếu một hình thoi nội tiếp một hình tròn thì đó là một hình vuông".

14. Dùng định nghĩa và tính chất của khối tám mặt đều và của khối lập phương.

15. a) Không thay đổi. b) Có thể thay đổi.

c) Không thay đổi.

16. Lấy M là một điểm nằm giữa C và D sao cho $CM = kMD$. Khi đó khối tứ diện $ABCD$ được phân chia thành hai khối tứ diện $ABCM$ và $ABMD$ thoả mãn điều kiện bài toán.

17. $V_{ABCD.A'B'C'D'} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

18. $V_{\text{lăng trụ}} = \dfrac{1}{4}na^3\cot\dfrac{\pi}{n}$.

19. a) $AC' = 3b$. b) $V_{\text{lăng trụ}} = b^3\sqrt{6}$.

20. a) $V_{\text{lăng trụ}} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

b) Chứng minh $BC \perp AA'$ và từ đó suy ra điều phải chứng minh.

c) $S_{xq} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{3}(\sqrt{13}+2)$.

21. Tổng các khoảng cách từ M đến bốn mặt của tứ diện bằng $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

22. Tỉ số thể tích của hai phần bằng 1.

23. Gọi H và H' lần lượt là hình chiếu của A và A' trên mặt phẳng (SBC).

Hãy chứng minh : S, H, H' thẳng hàng và sử dụng đẳng thức

$$\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.A'B'C'}} = \frac{V_{A.SBC}}{V_{A'.SB'C'}}$$

để suy ra công thức cần tìm.

24. Gọi B', D' lần lượt là các giao điểm của mặt phẳng (P) với các cạnh SB và SD. Khi đó AM, $B'D'$, SO ($O = AC \cap BD$) đồng quy tại trọng tâm G của tam giác SAC và $B'D' \parallel BD$. Từ đó sử dụng công thức tỉ số thể tích của hai khối chóp tam giác để tìm ra đáp số của bài toán.

25. Hãy chứng minh phép vị tự tỉ số k biến đường cao AH của hình chóp $A.BCD$ thành đường cao $A'H'$ của hình chóp $A'.B'C'D'$ và $A'H' = |k|AH$, $S_{B'C'D'} = k^2S_{BCD}$.

Ôn tập chương I

1. $V_{C.AB'D'} = \dfrac{1}{4}V$, $V_{C.B'D'DB} = \dfrac{3}{4}V$.

2. Gọi M, N, I, J, K, E lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB, BC, CC', C'D', D'A', A'A$ của khối hộp. Dễ thấy MN, EI, KJ, đôi một song song và chúng lần lượt đi qua ba điểm thẳng hàng M, O, J (O là giao điểm của các đường chéo của hình hộp). Từ đó suy ra M, N, I, J, K, E nằm trên mặt phẳng (α) đi qua O. Khi đó, (α) chia khối hộp thành hai phần là ảnh của nhau qua phép đối xứng tâm O.

3. a) $ADEF$, $ACEF$, $BDEF$, $BCEF$.

b) Sử dụng tính chất : Mặt phẳng qua một cạnh và trung điểm của cạnh đối diện của một tứ diện phân chia khối tứ diện thành hai khối tứ diện có thể tích bằng nhau.

c) Nếu $ABCD$ là tứ diện đều thì nó có mp(ABF) và mp(CDE) là hai mặt phẳng đối xứng và phép đối xứng trục EF biến tứ diện $ADEF$ thành tứ diện $BCEF$.

4. a) $V_{ABC.A_1B_1C_1} = V_{A_1.ABC} + V_{A_1.BCC_1B_1}$

$$= \frac{1}{3}(a+b+c)S.$$

$$V_{A_1B_1C_1.A'B'C'} = \frac{1}{3}[(h-a)+(h-b)+(h-c)].S$$

b) $V_{ABC.A_1B_1C_1} = V_{A_1B_1C_1.A'B'C'}$

$\Leftrightarrow 3h = 2(a+b+c)$.

5. Gọi V_1 là thể tích của phần chứa cạnh AA' và V_2 là thể tích phần còn lại.

Khi đó : $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{7}{5}$.

6. a) $V_{S.ABC} = \dfrac{a^3}{6}$.

b) Dễ thấy $AB' \perp (SBC) \Rightarrow AB' \perp SC$, mặt khác $AC' \perp SC \Rightarrow SC \perp (AB'C')$.

c) $V_{S.AB'C'} = \dfrac{a^3}{36}$.

Câu hỏi trắc nghiệm chương I

1. (C), **2.** (D), **3.** (D), **4.** (B), **5.** (D), **6.** (D), **7.** (C), **8.** (C), **9.** (D), **10.** (D), **11.** (B), **12.** (C), **13.** (A), **14.** (D), **15.** (C), **16.** (C), **17.** (B), **18.** (D), **19.** (D), **20.** (B), **21.** (D), **22.** (A), **23.** (C), **24.** (A), **25.** (B), **26.** (C), **27.** (B), **28.** (B), **29.** (C), **30.** (A), **31.** (C), **32.** (D).

Chương II

1. Tâm mặt cầu là trung điểm của AD.

Bán kính mặt cầu : $R = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

2. a) Mặt phẳng trung trực của AB.

b) Khi A, B, C không thẳng hàng thì tập hợp trên là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Khi A, B, C thẳng hàng thì tập hợp phải tìm là $\varnothing$.

c) Tập hợp phải tìm là trục của đường tròn đã cho.

d) Có.

3. Cả a) và b) đều đúng.

4. Đường tròn cố định phải tìm nằm trong mp(P) đi qua điểm A và vuông góc với d tại I, tâm đường tròn là I, bán kính đường tròn là IA.

5. a) Đúng.

b) Không đúng.

6. a) Tập hợp phải tìm là trục của đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

7. a) $V = \dfrac{\pi\left(a^2+3h^2\right)^3}{162h^3}$.

b) $V = \dfrac{5\pi a^3\sqrt{10}}{24}$.

8. a) $S = \dfrac{\pi}{2}(a^2+b^2+c^2)$.

9. $S = \pi(a^2+b^2+c^2)$.

10. b) Hình lập phương (có cạnh bằng $\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$, R là bán kính mặt cầu đã cho).

11. Mọi mặt phẳng đi qua trục của hình tròn xoay đều là mặt phẳng đối xứng.

12. a) Hình trụ. b) Khối trụ.

13. Là mặt trụ bán kính R, có trục là trục của đường tròn.

14. Gọi Δ là đường thẳng qua tâm O của mặt cầu và song song với đường thẳng cố định. Các tiếp tuyến nằm trên mặt trụ trục Δ, bán kính bằng bán kính mặt cầu.

15. a) $S_{xq}=4\pi R^2$, $S_{tp}=6\pi R^2$.

b) $V=2\pi R^3$.

c) $V_{LT}=4R^3$.

16. a) $S_{xq}=2\sqrt{3}\pi R^2$, $S=2\pi(\sqrt{3}+1)R^2$.

b) $V=\sqrt{3}\pi R^3$.

c) $d(AB,\Delta)=\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$, Δ là trục của hình trụ.

17. a) Hình nón. b) Khối nón.

18. Gọi mặt cầu là $S\ (I,\ R)$, M là tiếp điểm $\Rightarrow \widehat{MAI}=\alpha$ không đổi $\Rightarrow$ các đường thẳng qua A tiếp xúc với mặt cầu (S) luôn nằm trên mặt nón có trục là đường thẳng AI, góc ở đỉnh bằng 2α.

19. b) $R_c=\dfrac{r^2+h^2}{2h}$.

c) $r_n=\sqrt{h(2R-h)}$.

$S_{xq\,n}=\pi h\sqrt{2R(2R-h)}$.

20. b) $R_c=\dfrac{rh}{r+\sqrt{r^2+h^2}}$ (R_c là bán kính hình cầu nội tiếp hình nón).

21. $V=\dfrac{\pi}{3}.\dfrac{b^2c^2}{\sqrt{b^2+c^2}}$.

Ôn tập Chương II

1. Hai điểm đó là A và A', trong đó A' là điểm đối xứng của điểm A qua mặt phẳng (P).

2. Tâm mặt cầu là điểm đối xứng của S qua trung điểm H của AC, $R=a$.

3. a) Tâm I của mặt cầu phải tìm là giao các trục của hai đường tròn đã cho, bán kính mặt cầu là IB.

b) $IB=\sqrt{37}$.

4. a) $r_c=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

b) $r=\dfrac{a}{4}\sqrt[3]{2\sqrt{3}}$.

5. a) $V_1=\dfrac{1}{3}\pi b^2c$; $V_2=\dfrac{1}{3}\pi c^2b$;

$V_3=\dfrac{1}{3}\dfrac{\pi b^2c^2}{\sqrt{b^2+c^2}}$.

6. $V=\dfrac{1}{3}14\sqrt{2}\pi a^3$, $S_{xq}=14\pi a^2$.

Câu hỏi trắc nghiệm chương II

1. (D), **2.** (B), **3.** (A), **4.** (D), **5.** (B), **6.** (B), **7.** (D), **8.** (C), **9.** (D), **10.** (D), **11.** (C), **12.** (C), **13.** (A), **14.** (D), **15.** (A), **16.** (A), **17.** (D), **18.** (A), **19.** (A), **20.** (A), **21.** (A), **22.** (A), **23.** (A), **24.** (D), **25.** (B), **26.** (B).

Chương III

1. a) $\vec{u}=(1;-2;0)$;

$\vec{v}=(3;5;-5)$;

$\vec{w}=(2;3;-1)$.

b) $\cos\left(\vec{v},\vec{i}\right)=\dfrac{3}{\sqrt{59}}$;

$\cos\left(\vec{v},\vec{j}\right)=\dfrac{5}{\sqrt{59}}$;

$\cos\left(\vec{v},\vec{k}\right)=\dfrac{-5}{\sqrt{59}}$.

c) $\vec{u}.\vec{v} = -7$;

$\vec{u}.\vec{w} = -4$;

$\vec{v}.\vec{w} = 26$.

2. Giả sử $\vec{u}(x;y;z)$

$$\Rightarrow \cos^2\left(\vec{u}, \vec{i}\right) = \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2},$$

$$\cos^2\left(\vec{u}, \vec{j}\right) = \frac{y^2}{x^2+y^2+z^2},$$

$$\cos^2\left(\vec{u}, \vec{k}\right) = \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2} \Rightarrow \text{đpcm}.$$

3. a) $\cos\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

b) $\cos\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = \dfrac{-8\sqrt{13}}{65}$.

4. $k = 40$.

5. a) Gọi M_1 là hình chiếu của M trên mp(Oxy) $\Rightarrow M_1 = (a\,;\,b\,;\,0)$.

Gọi H_1 là hình chiếu của M trên trục Ox $\Rightarrow H_1 = (a\,;\,0\,;\,0)$.

b) $d(M,(Oxy)) = |c|$.

$d(M,Ox) = \sqrt{b^2+c^2}$.

c) Gọi M'_1 là điểm đối xứng của M qua mp$(Oxy) \Rightarrow M'_1\,(a\,;\,b\,;\,-c)$.

6. $M = \left(\dfrac{x_1-kx_2}{1-k};\dfrac{y_1-ky_2}{1-k};\dfrac{z_1-kz_2}{1-k}\right)$ với $k \neq 1$.

7. $D\,(-1\,;\,1\,;\,1)$, $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$.

8. a) $M\,(-1\,;\,0\,;\,0)$.

b) $AB \perp OC \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OC} = 0$

$$\Rightarrow \sin 5t = -\sin\left(3t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = -\dfrac{\pi}{24} + k\dfrac{\pi}{4} \\ t = \dfrac{2\pi}{3} + l\pi \end{array}\right. \quad k, l \in \mathbb{Z}.$$

9. a) Đồng phẳng.

b) Không đồng phẳng.

c) Đồng phẳng.

10. b) Chu vi bằng $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$,

$S_{ABC} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

c) $h_a = \dfrac{\sqrt{30}}{5}$.

d) $\widehat{A} = 90^\circ$, $\cos B = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$, $\cos C = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

11. a) $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD} \neq 0 \Rightarrow$ đpcm.

b) $AC \perp BD$.

$\cos(AB,CD) = \dfrac{3\sqrt{7}}{14}$, $\cos(BC, AD) = \dfrac{3\sqrt{7}}{14}$.

$V_{ABCD} = \dfrac{2}{3}$, $h_A = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

12. Chọn hệ trục $Oxyz$ gốc O trùng A, Ox là tia AC, Oz là tia AS.

$$MN = \frac{1}{6}\sqrt{b^2+4a^2+16h^2}.$$

$MN \perp SB$ khi $4h^2 = 2a^2 - b^2$.

13. a) Tâm $I\,(4\,;\,-1\,;\,0)$, $R = 4$.

b) Tâm $I\,(-1\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,-\dfrac{5}{2})$, $R = \dfrac{7\sqrt{6}}{6}$.

c) Tâm $I\,(\dfrac{1}{3}\,;\,-1\,;\,0)$, $R = 1$.

14. a) $x^2 + (y-7)^2 + (z-5)^2 = 26$.

b) $(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 4$.

c) $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1$.

15. a) $2x + y + z - 3 = 0$.

b) $x - 4y + 3 = 0$.

c) $x - 5y + z + 8 = 0$.

d) $y + z - 2 = 0$.

e) $z - c = 0$; $y - \mathrm{b} = 0$; $x - a = 0$.

g) $6x + 3y + 2z - 18 = 0$.

h) $2x + y + z - 6 = 0$.

16. a) Cắt nhau. b) Cắt nhau.

c) Song song. d) Cắt nhau.

e) Trùng nhau.

17. a) $\begin{cases} n = -1 \\ m = -4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} n = \dfrac{1}{2} \\ m = 4 \end{cases}$

18. a) Không có. b) $m = 1$.

c) $m \neq 1$. d) $m = -\dfrac{9}{19}$.

19. a)

$$\left[\begin{array}{l}(2\sqrt{5}-3\sqrt{3})x-(\sqrt{5}+5\sqrt{3})y+(4\sqrt{5}+\sqrt{3})z+5\sqrt{5}+\sqrt{3}=0\\(2\sqrt{5}+3\sqrt{3})x-(\sqrt{5}-5\sqrt{3})y+(4\sqrt{5}-\sqrt{3})z+5\sqrt{5}-\sqrt{3}=0\end{array}\right.$$

b) $\left[\begin{array}{l}-4x+16y-20z-1=0\\32x-2y-8z-13=0.\end{array}\right.$

c) $x + 2y + z + 2 = 0$.

20. $\dfrac{|-D+D'|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

21. a) $M(0\,;0\,;3)$.

b) $M(0\,;0\,;-2)$.

22. a) Chứng minh $\cos A > 0$, $\cos B > 0$, $\cos C > 0$.

b) Viết phương trình mặt phẳng (ABC) theo đoạn chắn

23. $\left[\begin{array}{l}4x+3y-12z+78=0\\4x+3y-12z-26=0.\end{array}\right.$

24. b) Song song với trục Ox :

$$\begin{cases} x = x_0 + t \\ y = y_0 \\ z = z_0 \end{cases} ;$$

Không có dạng chính tắc.

c) $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3t \\ z = -1 + 5t \end{cases}$; $\dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+1}{5}$;

d) $\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \\ z = 2 - 3t. \end{cases}$

Không có dạng chính tắc.

e) $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2 - 5t \\ z = 1. \end{cases}$

Không có dạng chính tắc.

g) $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 - t \\ z = -1 + 5t \end{cases}$; $\dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z+1}{5}$

25. a) $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 3 - 3t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$; $\dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y-3}{-3} = \dfrac{z-1}{2}$.

b) $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = 1 + 3t. \end{cases}$; $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z-1}{3}$.

26. Phương trình hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng tọa độ (Oxy) là

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 0. \end{cases}$$

27. a) $\vec{u}(1\,;4\,;2)$, $M_0(0\,;8\,;3)$.

b) $2x + y - 3z + 1 = 0$.

c) $\begin{cases} x = -8 + 4t \\ y = 15 - 5t \\ z = t. \end{cases}$

28. a) d, d' chéo nhau.

b) $d \,//\, d'$.

29. Gọi Δ là đường thẳng phải tìm,

$$\Delta : \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = -1 - \dfrac{1}{2}t \\ z = 1 + \dfrac{7}{2}t. \end{cases}$$

30. $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 + 4t \\ z = 2 - t. \end{cases}$

31. a) $\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_2M_1} = 168 \neq 0$.

b) $2x + y + 4z = 0$.

c) $2\sqrt{21}$.

d) $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{4}$.

32. a) $\sin(d, (\alpha)) = \dfrac{6}{\sqrt{57}}$.

b) $I\left(\dfrac{8}{3}\,;0\,;\dfrac{8}{3}\right)$.

c) $\begin{cases} x = \dfrac{8}{3} + 2t \\ y = -t \\ z = \dfrac{8}{3} - 3t. \end{cases}$

33. a) $A(1\,;2\,;3)$.

b) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-3}{-4}$.

34. a) $d(M, \Delta) = \dfrac{10\sqrt{2}}{3}$.

b) $d(N, \Delta) = \dfrac{\sqrt{2870}}{14}$.

35. a) Chú ý $d \,//\, d'$ nên khoảng cách h giữa d và d' bằng khoảng cách từ một điểm thuộc d tới d'.

$h = 2$.

b) $\dfrac{2\sqrt{110}}{55}$.

Ôn tập Chương III

1. a) $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\overrightarrow{AD} = 4 \neq 0 \rightarrow$ đpcm.

b) $V_{ABCD} = \dfrac{2}{3}$.

c) $2x + y + z - 14 = 0$.

d) $(x-1)^2 + (y-6)^2 + (z-2)^2 = \dfrac{8}{3}$;

tiếp điểm $H\left(\dfrac{7}{3}\,;\dfrac{20}{3}\,;\dfrac{8}{3}\right)$.

2. a) $A'\left(\dfrac{15}{7}\,;-\dfrac{23}{7}\,;\dfrac{10}{7}\right)$.

b) $\sin\alpha = \dfrac{7}{\sqrt{238}}$.

c) $(Q) : 4x - y - 2z - 9 = 0$.

d) $I\left(\dfrac{23}{7}\,;\dfrac{9}{7}\,;\dfrac{10}{7}\right)$.

$$\Delta : \begin{cases} x = \dfrac{23}{7} + 4t \\ y = \dfrac{9}{7} - t \\ z = \dfrac{10}{7} - 2t. \end{cases}$$

3. a) $d' : \begin{cases} x = \dfrac{2}{3} + t \\ y = -\dfrac{1}{9} + \dfrac{2}{3}t \\ z = t. \end{cases}$

b) $d_1 : \begin{cases} x = \dfrac{13}{3} + t \\ y = t \\ z = -\dfrac{10}{3} + 2t. \end{cases}$

c) $\dfrac{x}{37} = \dfrac{y}{24} = \dfrac{z}{35}$.

4. a) $(P) : x - 9y + 5z + 20 = 0$.

b) $(Q) : x - 2y - 5z + 9 = 0$.

c) $d : \begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{29}{11} + \dfrac{2}{11}t \\ z = \dfrac{41}{55} + \dfrac{7}{55}t. \end{cases}$

d) $d(A, d_2) = \dfrac{2\sqrt{30}}{\sqrt{11}}$.

5. a) $\cos(d, d') = 0 \Rightarrow d \perp d'$.

b) $h = \dfrac{14}{\sqrt{42}}$.

c) $\Delta: \dfrac{x+1}{5} = \dfrac{y+1}{-4} = \dfrac{z-3}{1}$.

d) $\begin{cases} x = -4 \\ y = -7 \\ z = -6 + t. \end{cases}$

6. a) $(P) : 2x - 16y - 13z + 31 = 0$.

b) $V = \dfrac{31^3}{2496}$.

c) $x^2 + y^2 + z^2 + \dfrac{31}{2}x - \dfrac{31}{16}y - \dfrac{31}{13}z = 0$.

7. a) $\vec{u}\,.\,\vec{u'} = 0$, $\left[\vec{u}, \vec{u'}\right].\overrightarrow{M_0M_0'} = 2 \neq 0$.

b) $(P) : x - y - z + 9 = 0$,

$(Q) : x + z - 4 = 0$.

c) $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-5}{2} = \dfrac{z-4}{-1}$.

8. a) Góc giữa (P) và (Q) bằng 60°.

b) $d : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = -3 - t. \end{cases}$

c) $(R) : x + y - z + 2 = 0$.

9. a) $I(1 ; 2 ; 3)$, $R = \sqrt{14}$.

b) So sánh $|k|$ với $\sqrt{42}$.

c) $6x + 3y + 2z - 12 = 0$.

d) $x - 2y + 3z + 8 = 0$.

e) $\left[\begin{array}{l} 4x + 3y - 12z + 26 + 13\sqrt{14} = 0 \\ 4x + 3y - 12z + 26 - 13\sqrt{14} = 0. \end{array}\right.$

10. a) $\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{p} = 1$.

b) $V_{\min} = \dfrac{27}{6}$ khi $m = n = p = 3$.

Câu hỏi trắc nghiệm chương III

1. (C), **2.** (D), **3.** (C), **4.** (A), **5.** (D), **6.** (A), **7.** (B), **8.** (A), **9.** (A), **10.** (C), **11.** (C), **12.** (A), **13.** (C), **14.** (A), **15.** (A), **16.** (C), **17.** (D), **18.** (A), **19.** (A), **20.** (C), **21.** (B), **22.** (B), **23.** (C), **24.** (D), **25.** (B), **26.** (D), **27.** (C), **28.** (D), **29.** (D), **30.** (A), **31.** (A), **32.** (D), **33.** (B), **34.** (A), **35.** (D), **36.** (A), **37.** (D), **38.** (A), **39.** (B), **40.** (C), **41.** (C), **42.** (B).

Ôn tập cuối năm

I - Bài tập tự luận

1. Phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AA'}$ biến khối đa diện $ABC.PQR$ thành khối đa diện $A'B'C'.P'Q'R'$ nên 2 khối này có thể tích bằng nhau. Từ đó suy ra

$$V_{ABC.A'B'C'} = V_{PQR.P'Q'R'} = S_{PQR}.AA'.$$

2. V' là thể tích của khối tứ diện cần tìm thì $V' = \frac{1}{27}V$.

3. $V_{ACB'D'} = \frac{V}{3}$.

4. Gọi V và V' lần lượt là thể tích của các khối tứ diện đều và tám mặt đều đã cho. Khi đó $V' = \frac{V}{2}$.

5. $V = \frac{2}{3}\pi R^3$.

6. a) $V = \pi a^3$.

b) $V = \frac{7\sqrt{3}\pi a^3}{12}$.

8. a) Chứng minh $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD} \neq 0$.

b) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z - 19 = 0$, tâm $I = (1\ ;\ 2\ ;\ -1)$, $R = 5$.

c) $3x - 5y + 3z + 13 = 0$,

$$d(D, (ABC)) = \frac{18}{\sqrt{43}}.$$

d) $-4x - 3y + 5z + 15 \pm 25\sqrt{2} = 0$.

e) Gọi r_1, r_2, r_3 lần lượt là các đường tròn giao tuyến của mặt cầu (S) và các mặt phẳng toạ độ (Oxy), (Oyz), (Oxz). Khi đó

$$r_1 = 2\sqrt{6}, \quad r_2 = 2\sqrt{6}, \quad r_3 = \sqrt{21}.$$

9. a) Gọi d_1, d_2, d_3 lần lượt là các hình chiếu của Δ trên các mặt phẳng (Oxy), (Oyz), (Oxz). Khi đó

$$d_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 0 \end{cases}, \quad d_2 : \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 - t \\ z = 3t \end{cases}$$

$$d_3 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 0 \\ z = 3t. \end{cases}$$

c) $d(\Delta, Oz) = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $d(\Delta, Ox) = \frac{3\sqrt{10}}{10}$,

$d(\Delta, Oy) = \frac{3\sqrt{13}}{13}$.

d) $x = -\frac{6}{13} + 4t,\ y = -\frac{6}{13} - t,\ z = -\frac{6}{13} - 3t.$

e) $\begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \\ z = t. \end{cases}$

10. a) Quỹ tích là mặt phẳng có phương trình :

$$2x + 2y - 2z - 1 = 0.$$

b) Quỹ tích là mặt cầu có phương trình :

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

c) Quỹ tích là hai mặt phẳng :

$$-x + 3y + (2 \pm \sqrt{14})z = 0.$$

11. a) Đường thẳng Δ đi qua điểm cố định $(1\ ;\ 1\ ;\ 5)$.

Góc giữa Δ và trục Oz bằng 45°.

b) Quỹ tích là đường tròn tâm $I(1\ ;\ 1\ ;\ 0)$, bán kính $R = 5$ và nằm trong mp(Oxy).

12. a) $d(A, (A'BD)) = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$.

b) $d(A', C'D) = \dfrac{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}{\sqrt{a^2 + c^2}}$.

c) $d(BC', CD') = \dfrac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$.

II - Câu hỏi trắc nghiệm

1. (C), **2.** (C), **3.** (D), **4.** (B), **5.** (A), **6.** (B), **7.** (A), **8.** (C), **9.** (A), **10.** (B), **11.** (A), **12.** (C), **13.** (B), **14.** (D), **15.** (A), **16.** (B), **17.** (D), **18.** (D), **19.** (A), **20.** (A), **21.** (D), **22.** (D), **23.** (B).

III - Một số đề kiểm tra

Đề I

1. a) $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

b) $R = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

c) Hai hình đối xứng với nhau qua mp(SBD) nên bằng nhau.

2. a) $AB = BC = CA = 3\sqrt{2}$.

b) Phương trình mặt phẳng (ABC) :

$x + y + z - 5 = 0$.

$V = \dfrac{125}{6}$.

c) $x = 2 + t, \qquad y = t, \qquad z = 3 + t$.

d) Có hai điểm D : $D_1 = (4\ ;\ 2\ ;\ 5)$,

$D_2 = (0\ ;\ -2\ ;\ 1)$.

Đề II

1. a) $R = \dfrac{a\sqrt{22}}{8}$. b) $V_{D.BCC'B'} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{16}$.

2. a) Phương trình mặt cầu :

$x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 7y - 7z + 12 = 0$.

b) Phương trình đường thẳng qua H, O, G :

$$\frac{x}{6} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3}.$$

c) $d(O, \Delta) = \dfrac{18}{5}$,

trong đó $\Delta = (ABC') \cap (A'B'C)$.

Đề III

1. a) Thiết diện là một hình bình hành.

b) Hai khối $\mathscr{H}_1$ và $\mathscr{H}_2$ đối xứng với nhau qua O nên bằng nhau.

c) $V_{\mathscr{H}_1} = 3V_{AA'BD}$.

2. a) $d(A, Ox) = d(B, Ox) = \sqrt{10}$.

b) Có hai điểm C :

$C_1 = (0\ ;\ 0\ ;\ 4)$,

$C_2 = (0\ ;\ 0\ ;\ -2)$.

c) $\begin{cases} x = 0 \\ y = 4t - 3 \\ z = 4t - 1. \end{cases}$

d) Phương trình mặt cầu :

$$\left(x + \frac{53}{10}\right)^2 + \left(y + \frac{18}{5}\right)^2 + z^2 = \frac{4105}{100}.$$

BẢNG THUẬT NGỮ

B

Bán kính của mặt trụ 49
Bán kính của mặt cầu 38

C

Cạnh của khối đa diện 5
Cao độ 72

D

Diện tích của hình đa diện 43
Diện tích mặt cầu 44
Diện tích xung quanh của hình nón 56
Diện tích xung quanh của hình trụ 50

Đ

Đa diện xấp xỉ của mặt cầu 44
Đáy của hình nón 55
Đáy của hình trụ 49
Đặc số Ơle 20
Đỉnh của hình nón 55
Đỉnh của khối đa diện 5
Định lí Ơ-le 21
Đường kính mặt cầu 38
Đường tròn lớn của mặt cầu 41
Đường sinh của hình nón 55
Đường sinh của mặt nón 54
Đường sinh của mặt trụ 49

G

Giao tuyến elip của mặt trụ tròn xoay và mặt phẳng 52
Giao tuyến parabol của mặt nón tròn xoay và mặt phẳng 57
Góc ở đỉnh của mặt nón 54

H

Hai hình bằng nhau 12
Hai hình đồng dạng 17
Hệ toạ độ trong không gian 70
Hình đa diện 5
Hình nón 55
Hình tròn xoay 47
Hình trụ 49
Hoành độ 72

K

Khối cầu 39
Khối chóp 5
Khối đa diện 5
Khối đa diện đều 18
Khối đa diện đều loại {*n*, *p*} 18
Khối đa diện lồi 18
Khối lăng trụ 5
Khối nón 56
Khối trụ 50
Khối tám mặt đều 11
Khối mười hai mặt đều 19
Khối hai mươi mặt đều 19

M

Mặt cầu 38
Mặt của khối đa diện 5
Mặt hypeboloit tròn xoay một tầng 48
Mặt nón 54
Mặt phẳng đối xứng của một hình 10
Mặt tròn xoay 47
Mặt trụ 48
Mặt xuyến 48

P

Phân chia và lắp ghép các khối đa diện 6
Phép biến hình trong không gian 8
Phép dời hình trong không gian 11
Phép đối xứng qua mặt phẳng 8
Phép đối xứng tâm 12
Phép đối xứng trục 12
Phép đồng nhất 12
Phép tịnh tiến 12

Phép vị tự 16
Phương trình chính tắc của đường thẳng 94
Phương trình mặt cầu 80
Phương trình mặt phẳng 84
Phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn 86
Phương trình tham số của đường thẳng 93

T

Thể tích của khối đa diện 23
Thể tích khối cầu 43
Thể tích của khối chóp 25
Thể tích của khối hộp chữ nhật 24
Thể tích của khối lăng trụ 50
Thể tích khối nón 56
Thể tích khối trụ 50
Tích có hướng của hai vectơ 75
Tích vectơ của hai vectơ 75
Tiếp diện 41
Tiếp tuyến của mặt cầu 42
Tính chất của tích có hướng 76
Toạ độ của điểm 72
Toạ độ của vectơ 71
Trục cao 70
Trục của hình nón 49
Trục của hình tròn xoay 47
Trục của hình trụ 49
Trục hoành 70
Trục tung 70
Tung độ 72

V

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng 84
Vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng 87
Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng 98
Vị trí tương đối giữa mặt cầu
  và đường thẳng 41
Vị trí tương đối giữa mặt cầu và mặt phẳng 40

MỤC LỤC

Trang

Chương I - KHỐI ĐA DIỆN VÀ THỂ TÍCH CỦA CHÚNG

§1. Khái niệm về khối đa diện 4

§2. Phép đối xứng qua mặt phẳng và sự bằng nhau của các khối đa diện 8

§3. Phép vị tự và sự đồng dạng của các khối đa diện. Các khối đa diện đều 16

§4. Thể tích của khối đa diện 23

Ôn tập chương I 29

Chương II – MẶT CẦU, MẶT TRỤ, MẶT NÓN

§1. Mặt cầu, khối cầu 38

§2. Khái niệm về mặt tròn xoay 46

§3. Mặt trụ, hình trụ và khối trụ 48

§4. Mặt nón, hình nón và khối nón 54

Ôn tập chương II 60

Chương III – PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

§1. Hệ toạ độ trong không gian 70

§2. Phương trình mặt phẳng 84

§3. Phương trình đường thẳng 93

Ôn tập chương III 107

Ôn tập cuối năm 125

Hướng dẫn giải – Đáp số 133

Bảng thuật ngữ 144

Chịu trách nhiệm xuất bản : Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc **NGÔ TRẦN ÁI**
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập **NGUYỄN QUÝ THAO**

Biên tập nội dung : **PHAN THỊ MINH NGUYỆT - NGUYỄN TRỌNG THIỆP**
Biên tập mĩ thuật, kĩ thuật : **MAI PHƯƠNG LIÊN**
Trình bày bìa và vẽ hình : **BÙI QUANG TUẤN**
Sửa bản in : **PHÒNG SỬA BẢN IN** (NXB GIÁO DỤC TẠI HÀ NỘI)
Chế bản : **CÔNG TY THIẾT KẾ VÀ PHÁT HÀNH SÁCH GIÁO DỤC**
(NXB GIÁO DỤC)

HÌNH HỌC 12 NÂNG CAO

Mã số : NH202M8

In 870 cuốn(QĐIT), khổ 17 x 24 cm
In tại Công ty cổ phần In Khoa học Kỹ thuật - HN.
Số in: 46. Số XB: 720-2007/CXB/670-1571/GD.
In xong và nộp lưu chiểu tháng 4 năm 2008.

HUÂN CHƯƠNG HỒ CHÍ MINH

VƯƠNG MIỆN KIM CƯƠNG
CHẤT LƯỢNG QUỐC TẾ

SÁCH GIÁO KHOA LỚP 12

1. TOÁN HỌC
   - GIẢI TÍCH 12
   - HÌNH HỌC 12
2. VẬT LÍ 12
3. HOÁ HỌC 12
4. SINH HỌC 12
5. NGỮ VĂN 12 (tập một, tập hai)
6. LỊCH SỬ 12
7. ĐỊA LÍ 12
8. TIN HỌC 12
9. CÔNG NGHỆ 12
10. GIÁO DỤC CÔNG DÂN 12
11. NGOẠI NGỮ
    - TIẾNG ANH 12
    - TIẾNG PHÁP 12
    - TIẾNG NGA 12
    - TIẾNG TRUNG QUỐC 12

SÁCH GIÁO KHOA LỚP 12 - NÂNG CAO

Ban Khoa học Tự nhiên :
- TOÁN HỌC (GIẢI TÍCH 12, HÌNH HỌC 12)
- VẬT LÍ 12
- HOÁ HỌC 12
- SINH HỌC 12

Ban Khoa học Xã hội và Nhân văn :
- NGỮ VĂN 12 (tập một, tập hai)
- LỊCH SỬ 12
- ĐỊA LÍ 12
- NGOẠI NGỮ (TIẾNG ANH 12, TIẾNG PHÁP 12, TIẾNG NGA 12, TIẾNG TRUNG QUỐC 12)

8 934980 806708

SÁCH IN THỬ